Jänich: Lineare Algebra

Lösungen zu den Übungsaufgaben

A. Bieri 1991

Vorwort

Dieser Text ist eine (nahezu) vollständige Zusammenstellung von Lösungen zum Buch von Klaus Jänich: Lineare Algebra (Springer). Bis auf wenige Ausnahmen stammen diese Lösungen aus meiner eigenen Feder und sollten deshalb nicht als der Weisheit letzter Schluß betrachtet werden. Immerhin sollten sie keine groben Fehler mehr enthalten. Um den Text kurz zu halten, sind vielleicht einige Stellen zuwenig exakt ausformuliert. Ich habe mir aber Mühe gegeben, lückenlose Beweise zu geben. Verbesserungsvorschläge und Korrekturhinweise nehme ich gerne entgegen.

Andreas Bieri

1 Mengen und Abbildungen

Aufgabe 2
Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen und ist ferner $fg = Id_Y$ und $gf = Id_X$, so ist f bijektiv und $f^{-1} = g$.

Beweis
Seien $x, x' \in X$ und $f(x) = f(x')$. Dann ist $gf(x) = gf(x')$. Da $gf = Id_X$ ist, folgt: $gf(x) = x = gf(x') = x'$ also ist f injektiv.

f ist surjektiv: sei $y \in Y$. Wähle $x = g(y)$, dann gilt $f(x) = fg(y) = Id_Y(y) = y$. Damit gibt es zu jedem Bildpunkt ein Urbild.

f ist die Umkehrfunktion von g: Sei $y \in Y \Rightarrow x = g(y) \in X$. Aus $y = f(x)$ folgt $x = f^{-1}(y) \Rightarrow f^{-1}(y) = g(y) \Rightarrow f^{-1} = g$

Aufgabe 3
Sei

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ A \arrow[u, "\alpha", "\cong"'] \arrow[r, "g"'] & B \arrow[u, "\beta", "\cong"'] \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm von Abbildungen, und α und β seien bijektiv. Man beweise: g ist genau dann injektiv, wenn f injektiv ist.

Beweis

1. f sei injektiv. Aus $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ folgt $f(x_1) \neq f(x_2)$. Sei $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ $\Rightarrow \alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$. Sei $x_1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(a_1), x_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(a_2)$. Dann gilt:
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow \beta^{-1}(f(x_1)) \neq \beta^{-1}(f(x_2)).$$
Mit $g = \beta^{-1} \circ f \circ \alpha$ gilt also $g(x_1) \neq g(x_2)$.

2. f sei nicht injektiv. Es gibt $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Setze $a_1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{-1}(x_1)$, $a_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha^{-1}(x_2), a_1 \neq a_2 \in A$ da α bijektiv. Setze ebenso $b_1 \stackrel{\text{def}}{=} \beta^{-1}(f(x_1)), b_2 \stackrel{\text{def}}{=} \beta^{-1}(f(x_2))$, $b_1 = b_2 \in B$. Es folgt:
$$g(a_1) = (\beta^{-1} \circ f \circ \alpha)(a_1) = b_1 = b_2 = g(a_2)$$
und g ist nicht injektiv.

Bemerkung: Zum Beweis einer Aussage $A \Longleftrightarrow B$ muss gezeigt werden:
$$A \Longrightarrow B \;\; und \;\; B \Longrightarrow A$$
oder
$$A \Longrightarrow B \;\; und \;\; \neg A \Longrightarrow \neg B$$
denn aus $\neg A \Rightarrow \neg B$ folgt $\neg(\neg B)) \Rightarrow \neg(\neg A))$ und $A \Leftrightarrow B$.

2 Vektorräume

Aufgabe 4
Man beweise: Ist V ein Vektorraum über K so gilt für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$:

a) $0 + x = x$

b) $-0 = 0$

c) $\lambda 0 = 0$

d) $0 \cdot x = 0$

e) $\lambda x = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ oder $x = 0$

f) $-x = (-1)x$

Beweis

a) $0 + x = x + 0 = x$ nach Axiom 2 und 3

b) $0 = 0 - 0 = 0 + (-0) = (-0) + 0 \Rightarrow -0 = 0$ durch Anwendung der Axiome 4, 2, der Definition von -x und Subtraktion von 0 auf beiden Seiten

c) $\lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0 \Rightarrow 0 = \lambda 0$ nach Axiom 3, 7 und Subtraktion von $\lambda 0$

d) $0x = (0 + 0)x = 0x + 0x \Rightarrow 0 = 0x$ analog zu c) mit Axiom 8.

e) Es genügt, $\lambda x = 0, \lambda \neq 0, x \neq 0$ zu widerlegen.
Gegenannahme: $\lambda x = 0, \lambda \neq 0, x \neq 0$. Da $\lambda \neq 0$ existiert $\lambda^{-1} \Rightarrow \lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda^{-1} \cdot 0 = 0$ und auch: $\lambda^{-1}(\lambda x) = (\lambda^{-1}\lambda)x = 1 \cdot x = x \Rightarrow x = 0$ Widerspruch zur Voraussetzung $x \neq 0$. Damit ist die Gegenannahme widerlegt und der Satz bewiesen.

f) Es gilt $x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0$ nach Axiom 4, 7, Aufgabe c). Daraus folgt $(-1) \cdot x = -x$

Aufgabe 5
Für alle $\alpha \in K$ definiere man $U_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2, x_3) \in K^3 | x_1 + x_2 + x_3 = \alpha\}$. Man beweise: U_α ist genau dann ein Unterrraum von K^3, wenn $\alpha = 0$ ist.

Beweis
Mit den üblichen Operationen in K ist $(0, 0, 0)$ der Nullvektor. Er ist Element jedes Unterraumes. Daraus folgt: $\alpha \neq 0 \Rightarrow U_\alpha$ ist kein Unterraum. Ist $\alpha = 0$ so gilt: Sei $x, y \in K^3$; $\lambda, \mu \in K$.

$$\begin{aligned}
\lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) + (\mu y_1, \mu y_2, \mu y_3) \\
&= \lambda(x_1, x_2, x_3) + \mu(y_1, y_2, y_3) \in U_\alpha
\end{aligned}$$

da

$$\lambda(x_1 + x_2 + x_3) + \mu(y_1 + y_2 + y_3) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

Aufgabe 6
Sei V ein Vektorraum und U_1, U_2 Unterräume von V. Man zeige: Ist $U_1 \cup U_2 = V$, dann ist $U_1 = V$ oder $U_2 = V$.

Beweis
Zu zeigen ist: $U_1 = V$ oder $U_2 = V$. Der Beweis erfolgt indirekt. Die Gegenannahme lautet: $U_1 \cup U_2 = V$ und $U_1 \neq V$, $U_2 \neq V$. Man betrachte die Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V. Dann gibt es ein e_k mit $e_k \in U_1$, $e_k \notin U_2$ (sonst wäre U_1 eine Teilmenge von U_2 und $U_1 \cup U_2 = U_2 = V$ im Widerspruch zur Annahme). Durch eine analoge Überlegung folgt: es gibt ein $e_l \in U_2$, $e_l \notin U_1$. Man betrachte $e_k + e_l \in V$. Es ist $e_k + e_l \notin U_1$, sonst wäre $(e_k + e_l) - e_k \in U_1 \Rightarrow e_l \in U_1$, ein Widerspruch zur Festlegung von e_l. Analog folgt $e_k + e_l \notin U_2$. Damit gibt es ein $x \in V$, $x = e_k + e_l$ und $x \notin U_1 \cup U_2$. Also kann $U_1 \cup U_2 = V$ nicht sein und die Gegenannahme falsch. Es folgt, dass $U_1 = V$ oder $U_2 = V$ (oder beide).

Aufgabe 1*
Gelten für $(K, +, \cdot)$ alle Körperaxiome mit möglicher Ausnahme des Axioms 8 (multiplikatives Inverses), so nennt man $(K, +, \cdot)$ einen *kommutativen Ring mit Einselement*. Kann darüberhinaus $\lambda\mu = 0$ nur eintreten wenn $\lambda = 0$ oder $\mu = 0$ gilt, so ist K ein *nullteilerfreier kommutativer Ring mit Einselement* oder ein *Integritätsbereich*. Man beweise: Jeder endliche Integritätsbereich ist ein Körper.

Beweis
Sei $K \overset{\text{def}}{=} \{0, 1, \ldots, a_n\}$. Nachzuweisen bleibt die Existenz eines multiplikativen Inversen, d.h. zu zeigen ist:

$$\forall a \in K \setminus \{0\} : \exists a_k \Rightarrow a \cdot a_k = 1 \tag{1}$$

Gegeben sei $a \neq 0$. l sei eine Abbildung

$$\begin{aligned} l : K &\longrightarrow K \\ b &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

Die Abbildung l ist injektiv: sei b, $\bar{b} \in K$, dann folgt aus $ab = a\bar{b}$:

$$\begin{aligned} ab &= a\bar{b} \\ (ab) + (-a\bar{b}) &= 0 \\ a(b - \bar{b}) &= 0 \\ b - \bar{b} &= 0 \Rightarrow b = \bar{b} \end{aligned}$$

da die Multiplikation nach Voraussetzung nullteilerfrei ist. Aus der Endlichkeit von K folgt nun, dass l bijektiv ist (alle Bilder sind verschieden). Damit gibt es ein k so, dass $l(a_k) = 1$. Da a beliebig gewählt wurde, ist somit Gleichung (1) bewiesen.

Aufgabe 4P
In einem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum sei (e_1, e_2, e_3) eine orthonormale Basis. Es seine x,y Vektoren mit $x = 3e_1 + 4e_2$, $\|y\| = 5$ und $< y, e_3 > \neq 0$. Man berechne aus diesen Daten den cosinus des Öffnungswinkels zwischen $x + y$ und $x - y$. Warum kann die Aufgabe im Fall $< y, e_3 >= 0$ sinnlos werden?

Beweis

Es gilt: $\|x\| = \|(3,4,0)\| = 5 = \|y\|$. Ist $y = (y_1, y_2, y_3)$ so folgt aus der Voraussetzung $< y, e_3 > \neq 0$ dass $y_3 \neq 0$ somit $y \neq x$. Benützt man die geometrische Definition des Skalarproduktes, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} < x+y, x-y > &= \|x+y\| \cdot \|x-y\| \cdot \cos\gamma \\ \cos\gamma &= \frac{< x+y, x-y >}{\|x+y\| \cdot \|x-y\|} \\ < x+y, x-y > &= < x, x-y > + < y, x-y > \\ &= < x, x > - < x, y > + < x, y > - < y, y > \\ &= 0 \\ \Rightarrow \gamma &= 90^\circ \end{aligned}$$

$x+y$, $x-y$ sind also orthogonal. Dabei wurde vorausgesetzt, dass der Nenner verschieden von Null ist. Da $\|x+y\| \geq \|x\| \geq 0$, kann man sich auf die Betrachtung von $\|x-y\|$ beschränken:

$$< y, e_3 > \neq 0 \Rightarrow x \neq y \Rightarrow \|x-y\| > 0$$

Wie oben gezeigt, ist der Öffnungswinkel für $< y, e_3 > \neq 0$ wohldefiniert. Andernfalls sind die Vektoren x, y für $y = (3,4,0)$ identisch und die Frage nach dem Öffnungswinkel wird sinnlos, da $x - y = 0$ (Winkel mit dem Nullvektor sind nicht definiert).

Aufgabe 5P

Sei (e_1, e_2) eine orthonormale Basis in einem zweidimensionalen Vektorraum V, d.h. $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$, $< e_1, e_2 >= 0$ und alle Vektoren von V sind von der Form $\lambda e_1 + \lambda e_2$. Sei $x = e_1 + e_2$. Man beweise: $V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V | < v, x >= \alpha\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, ist genau dann ein Unterraum von V wenn $\alpha = 0$ ist.

Beweis

Sei $y \in V$, dann hat y die Form $y = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$. $x \stackrel{\text{def}}{=} e_1 + e_2$.
Zu zeigen: $V_\alpha = \{v \in V | < v, x >= \alpha\}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ ist ein Unterraum $\Longleftrightarrow \alpha = 0$.

1. $\alpha \neq 0$. Jeder Unterraum muss den Nullvektor enthalten; mit den üblichen Operationen ist dies der Vektor $0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$. Es ist aber

   $$< 0, x >= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 = 0 \neq \alpha$$

   also $0 \notin V_\alpha$ und V_α ist kein Unteraum.

2. $\alpha = 0$. Behauptung: V_α ist ein Unterraum.
   Seien a , $b \in V_\alpha$ und λ_1,$\lambda_2 \in \mathbf{R}$. Zu zeigen ist: a, $b \in V_\alpha \Rightarrow \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b \in V_\alpha$.

   $$\begin{aligned} < x, \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b > &= < x, \lambda_1 \cdot a > + < x, \lambda_2 \cdot b > \\ &= \lambda_1 < x, a > + \lambda_2 < x, b > \\ &= \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 \end{aligned}$$

   also ist $\lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b \in V_\alpha$ und V_α ein Unterraum.

3 Dimensionen

Aufgabe 7
Sei V ein reller Vektorraum und $a, b, c, d \in V$. Sei

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} v_1 & = & a & + & b & + & c & + & d \\ v_2 & = & 2a & + & 2b & + & c & - & d \\ v_3 & = & a & + & b & + & 3c & - & d \\ v_4 & = & a & & & - & c & + & d \\ v_5 & = & & & b & + & c & - & d \end{array}$$

Man beweise, dass $(v_1, \ldots, v_5)$ linear abhängig ist.

Beweis
Sei $S \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b, c, d\}$. Es gilt: $v_i \in [S]$, $1 \leq i \leq 5$. $[S]$ ist ein Unterraum über $\mathbf{R}$, mit Dimension 4. Mehr als 4 Vektoren in $[S]$ sind also linear abhängig, damit ist das Gleichungssystem linear abhängig.

Aufgabe 8
Sei V ein Vektorraum über K und U_1, U_2 Unterräume von V. U_1 und U_2 heissen *komplementär*, wenn $U_1 + U_2 = V$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Man beweise: Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum über K und U_1 ein p-dimensionaler Unterraum von V, so gibt es einen zu U_1 komplementären Unterraum U_2 mit Dimension $n - p$.

Beweis
Es ist $\dim V = n$. Es gibt eine (ungeordnete) Basis $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ von V. U_1 sei ein Unterraum von V mit $\dim U_1 = p$. $A = \{u_1, \ldots, u_p\}$ sei eine Basis von U_1. A ist eine unabhängige Menge und B ist erzeugend; also lässt sich der Austauschsatz anwenden und es folgt nach ev. Umnummerierung:

$$V = [u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n]$$

$\{u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n\}$ hat n Elemente und erzeugt V, ist also eine Basis von V. Behauptung:

$$U_2 \stackrel{\text{def}}{=} [v_{p+1}, \ldots, v_n]$$

ist ein zu U_1 komplementärer Unterraum.

$$U_1 + U_2 = [A \cup \{v_{p+1}, \ldots, v_n\}] = [u_1, \ldots, u_p, v_{p+1}, \ldots, v_n] = V$$

Zum Beweis von $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gehe man von der Gegenanahme aus: sei $w \in U_1 \cap U_2$, $w \neq 0$. Dann ist $w \in U_1$ und es folgt:

$$\begin{array}{rcl} w & = & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p \\ u_1 & = & \dfrac{1}{\alpha_1} \cdot w - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot u_2 - \cdots - \dfrac{\alpha_p}{\alpha_1} \cdot u_p \end{array}$$

unter der Annahme dass $\alpha_1 \neq 0$ nach einer allfälligen Umnummerierung. Analog folgt:

$$\begin{array}{rcl} v_{p+1} & = & \dfrac{1}{\alpha_{p+1}} \cdot w - \dfrac{\alpha_{p+2}}{\alpha_{p+1}} \cdot v_{p+2} - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{p+1}} \cdot v_n \\ \Rightarrow V & = & [B \setminus \{u_1, v_{p+1}\} \cup \{w\}] \end{array}$$

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass B minimal erzeugend ist. Also kann $U_1 \cap U_2 \neq \{0\}$ nicht sein und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 9

Ist V ein Vektorraum über K, der nicht endlich erzeugbar ist („unendlichdimensional“), dann gibt es zu jedem $r > 0$ ein linear unabhängiges Tupel $(v_1, \ldots, v_r)$ in V.

Beweis

Gegenannahme: Es existiere für $r = n$ kein solches Tupel. Dann ist $R = (v_1, \ldots, v_n)$ linear abhängig. Nach Definition lässt sich ein Vektor v_k als Linearkombination der anderen darstellen. Es gilt: $[R] = [R \setminus v_k]$. Ist $(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots v_n)$ linear abhängig, wird das Verfahren wiederholt. Da n endlich ist , wird das Verfahren in endlich vielen Schritten zu Ende sein. Ist das Tupel linear unabhängig, so ist es ein maximal linear unabhängiges Tupel, somit eine Basis mit Dimension $\dim V \leq n$. Dann wäre V endlich erzeugbar im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es zu jedem $r > 0$ ein linear unabhängiges r-Tupel.

Aufgabe 2*

Aus einem komplexen Vektorraum lässt sich stets dadurch einen rellen machen dass man die Skalarmultiplikation $\mathbf{C} \times V \to V$ einfach auf $\mathbf{R} \times V$ einschränkt. Da die Begriffe *lineare Hülle* und *Dimension* bei dieser Einschränkung einen anderen Sinn annehmen, bezeichne $L_{\mathbf{C}}$, $\dim_{\mathbf{C}}$ und $L_{\mathbf{R}}$, $\dim_{\mathbf{R}}$ die lineare Hülle und Dimension über $\mathbf{C}$ bzw. $\mathbf{R}$. Man bestimme für jedes $n \geq 0$, für welche Zahlenpaare (r, s) es einen komplexen Vektorraum und Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ darin gibt, so dass

$$r = \dim_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_n) \qquad s = \dim_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_n)$$

Lösung

Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V.

1. $K = \mathbf{R}$
   Man wähle aus diesen Vektoren eine minimal erzeugendes Tupel $(v_1, \ldots, v_k)$ von Vektoren von $L_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_n)$. Dann gilt

$$\dim_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_n) = \dim_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{R}}(v_1, \ldots, v_k) = k \overset{\text{def}}{=} s$$

2. $K = \mathbf{C}$
   Sei $x \in L_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_k)$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} x &= c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \qquad c = a + bi \in \mathbf{C} \\ &= (a_1 + b_1 i) v_1 + \cdots + (a_k + b_k i) v_k \\ &= (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k) + i \cdot (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_k v_k) \\ &\overset{\text{def}}{=} \bar{a} + i \cdot \bar{b} \end{aligned}$$

   Die Vektoren 1 und i sind trivialerweise linear unabhängig. Es folgt also:

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{a} + i \cdot \bar{b} && (1) \\ \Rightarrow 0 &= (a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k) && (2) \\ 0 &= i \cdot (b_1 v_1 + b_2 v_2 + \cdots + b_k v_k) && (3) \end{aligned}$$

Mit der linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_k)$ (nach Annahme) folgt aus Gleichung 2), dass $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$ und ebenso aus Gleichung 3) $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. Also ist $(a_1, \cdots, a_k, ib_1, \ldots, ib_k)$ unabhängig und es ist:

$$r = \dim_{\mathbf{R}} L_{\mathbf{C}}(v_1, \ldots, v_k) = 2k = 2s$$

Es gibt also zu jedem Paar (r, s), $r = 2s$, einen Vektorraum V so, dass V über $\mathbf{R}$ die Dimension s und über $\mathbf{C}$ die Dimension r hat. Für die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ wähle man eine Basis von V. Ihre lineare Hülle ist gleich dem Vektorraum und die verlangte Beziehung zwischen den Dimensionen der linearen Hüllen folgt aus obigem Satz.

Aufgabe 9P

Sei V ein orientierter dreidimensionaler euklidischer Vektorraum und (e_1, e_2, e_3) eine positiv orientierte Basis in V. Seien $x = 7e_1 + 5e_2 + 4e_3$ und $y = 11e_1 + 8e_2 + 6e_3$. Man bestimme einen Vektor $v \in V$ mit den folgenden drei Eigenschaften: v steht senkrecht auf x und y, das Tripel (x, y, z) ist eine positiv orientierte Basis von V und $\|v\| = 1$. (d.h. man bestimme die Koeffizienten in der Darstellung $v = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$)

Beweis

$(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ ist die positiv orientierte orthonormierte Basis von V. Seien $x, y \in V$ mit

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 \\ y &= \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \mu_3 e_3 \end{aligned}$$

dann steht

$$\begin{aligned} x \times y &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} \\ &= e_1 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} - e_2 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_3 \end{pmatrix} + e_3 \cdot \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

senkrecht auf x und y. Setzt man $x = 7e_1 + 5e_2 + 4e_3$ und $y = 11e_1 + 8e_2 + 6e_3$ ein und multipliziert mit -1 (γ ist beliebig) erhält man:

$$v = x \times y = 2\gamma e_1 - 2\gamma e_2 - \gamma e_3$$

Mit der Bedingung $\|v\| = 1$ folgt $\gamma = \pm\frac{1}{3}$. Da (x, y, v) eine positiv orientierte Basis sein soll, muss gelten:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \det \begin{pmatrix} 7 & 5 & 4 \\ 11 & 8 & 6 \\ 2\gamma & -2\gamma & -\gamma \end{pmatrix} \\ 0 &\leq 7 \cdot \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -2\gamma & -\gamma \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 2\gamma & -\gamma \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 2\gamma & -2\gamma \end{pmatrix} \\ 0 &\leq (28 + 5 \cdot 23 - 4 \cdot 38)\gamma \\ 0 &\leq -9\gamma \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$$

4 Lineare Abbildungen

Aufgabe 10
Seien V und W Vektorräume über K, sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Man beweise: f ist bijektiv $\Longleftrightarrow$ $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ ist linear unabhängig.

Beweis
Sei f ein Isomorphismus. Mit der Linearität von f folgt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) &= 0 \\ \Longrightarrow f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) &= 0 \end{aligned}$$

Da f injektiv ist, folgt aus $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n &= 0 \\ \Longrightarrow \lambda_i &= 0 \quad \forall i \end{aligned}$$

weil $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V ist. Mit der ersten Gleichung sind die Bildvektoren somit linear unabhängig. Sei umgekehrt $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig.
Zu zeigen: $f(v) = 0 \Rightarrow v = 0$. Sei $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ ein Vektor mit $f(v) = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(v) &= 0 \\ f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) &= 0 \\ \lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_n f(v_n) &= 0 \\ \Longrightarrow \lambda_i &= 0 \quad \forall i \\ \Longrightarrow v &= 0 \end{aligned}$$

also ist f injektiv.

Aufgabe 11
Sei K ein Körper und $\mathbf{P}_n = \{\lambda_0 + \lambda_1 t + \cdots + \lambda_n t^n | \lambda_i \in K\}$ der Vektorraum der Polynome in t vom Grade $\leq n$ mit Koeffizienten aus K. Ist $f(t) \in \mathbf{P}_n$ und $g(t) \in \mathbf{P}_m$, so ist das Produkt $f(t) \cdot g(t) \in \mathbf{P}_{n+m}$ in der naheliegenden Weise erklärt. $(1, t, \ldots, t^n)$ heisst die *kanonische Basis* von $\mathbf{P}_n$. Man bestimme die Matrix der linearen Abbildung $\phi : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_4$, $\phi(t) \mapsto (2 - t)\phi(t)$ bezüglich der kanonischen Basen.

Lösung
Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren $e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$, $e_5 = t^4$.

$$\begin{aligned} \phi(e_1) &= (2 - t)1 = 2e_1 - e_2 \\ \phi(e_2) &= (2 - t)t = 2e_2 - e_3 \\ \phi(e_3) &= (2 - t)t^2 = 2e_3 - e_4 \\ \phi(e_4) &= (2 - t)t^3 = 2e_4 - e_5 \end{aligned}$$

und damit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

Unter einem *endlichen Kettenkomplex C* versteht man eine Folge von Homomorphismen

$$0 \xrightarrow{f_{n+1}} V_n \xrightarrow{f_n} \cdots \xrightarrow{f_2} V_1 \xrightarrow{f_1} V_0 \xrightarrow{f_0} 0$$

mit der Eigenschaft $f_i \circ f_{i+1} = 0$, d.h. $\mathrm{Im\ f_{i+1}} \subset \mathrm{Kern\ f_i}$. Der Quotientenvektorraum

$$H_i(C) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Kern } f_i / \mathrm{Im\ f_{i+1}}$$

heisst die *i-te Homologie des Komplexes.* Man beweise: Sind alle V_i endlichdimensonal, so gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim V_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H_i(C)$$

Beweis

Mit Notiz 2 auf Seite 78 folgt für die Dimension einer Homologie:

$$\dim H_i(C) = \dim \text{ Kern } f_i - \dim \mathrm{\ Im\ f_{i+1}}$$

Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{0}^{n} (-1)^i \dim V_i &= \sum_{0}^{n} (-1)^i (\dim \text{ Kern } f_i + \dim \mathrm{\ Im\ f_i}) \\
&= \sum_{0}^{n} (-1)^i \dim \text{ Kern } f_i + \sum_{0}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{\ Im\ f_i} \\
\sum_{0}^{n} (-1)^i \dim H_i(C) &= \sum_{0}^{n} (-1)^i (\dim \text{ Kern } f_i - \dim \mathrm{\ Im\ f_{i+1}}) \\
&= \sum_{0}^{n} (-1)^i \dim \text{ Kern } f_i + \sum_{1}^{n+1} (-1)^i \dim \mathrm{\ Im\ f_i}
\end{aligned}$$

Da $f_{n+1} : 0 \mapsto 0$ und $f_0 : V_0 \longrightarrow 0$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
\dim \mathrm{\ Im\ f_0} &= 0 \\
\dim \mathrm{\ Im\ f_{n+1}} &= 0 \\
\Longrightarrow \sum_{0}^{n} (-1)^i \dim \mathrm{\ Im\ f_i} &= \sum_{1}^{n+1} (-1)^i \dim \mathrm{\ Im\ f_i}
\end{aligned}$$

Oben eingesetzt ergibt dies die gewünschte Gleichung.
Bemerkung: diese Wechselsumme heisst *Euler-Poincaré-Charakteristik des Komplexes C* und wird mit $\chi(C)$ bezeichnet.

Aufgabe 3*

(*Fünferlemma*). In dem folgenden kommutativen Diagramm von Vektorräumen und Homomorphismen seien die beiden Zeilen *exakt*, d.h. Kern $f_i = \mathrm{Im\ f_{i+1}}$, Kern $g_i = \mathrm{Im\ g_{i+1}}$ für $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{tikzcd}
V_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "\text{surj.}"', "\phi_4"] & V_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "\cong"', "\phi_3"] & V_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\phi_2"] & V_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\cong"', "\phi_1"] & V_0 \arrow[d, "\text{inj.}"', "\phi_0"] \\
W_4 \arrow[r, "g_4"'] & W_3 \arrow[r, "g_3"'] & W_2 \arrow[r, "g_2"'] & W_1 \arrow[r, "g_1"'] & W_0
\end{tikzcd}$$

Man zeige: ϕ_2 muss ein Isomorphismus sein.

Beweis

1. ϕ_2 ist injektiv
   Sei $x \in V_2$ mit $\phi_2(x) = 0$. Zeige $x = 0$. Der Beweis stützt sich auf die Kommutativität des Diagramms und die Exaktheit der Sequenzen.

   (a) $(\phi_1 \circ f_2)(x) = (g_2 \circ \phi_2)(x) = 0 \Longrightarrow f_2(x) = 0$ da ϕ_1 injektiv ist und also nur den Nullvektor auf Null abbildet.

   (b) $\exists y \in V_3$ mit $f_3(y) = x$ da $x \in$ Kern f_2 also $x \in \mathrm{Im\, f_3}$ (exakte Sequenz).

   (c) $(g_3 \circ \phi_3)(y) = (\phi_2 \circ f_3)(y) = \phi_2(x) = 0 \Rightarrow \phi_3(y) \in$ Kern $g_3 \Rightarrow \phi_3(y) \in \mathrm{Im\, g_4}$. Das heisst:
   $$\exists z \in W_4 \text{ mit } g_4(z) = \phi_3(y)$$

   (d) ϕ_4 ist injektiv: $\Rightarrow \exists u \in V_4$ mit $\phi_4(u) = z$. Also:
   $$\phi_3(y) = g_4(z) = (g_4 \circ \phi_4)(u) = (\phi_3 \circ f_4)(u)$$
   weil das Diagramm kommutativ ist. ϕ_3 ist injektiv $\Rightarrow f_4(u) = y$ durch Vergleich des Anfangs und des Endes obiger Gleichung.

   (e) Es ist $x = f_3(y) = (f_3 \circ f_4)(u) = 0$ (exakte Sequenz). Das war zu zeigen.

2. ϕ_2 ist surjektiv: Sei $y \in W_2$. Zu zeigen: $\exists x \in V_2$ mit $\phi_2(x) = y$.

   (a) Setze $z = g_2(y)$. Da $z \in \mathrm{Im\, g_2}$ ist $z \in$ Kern $g_1 \Rightarrow g_1(z) = 0$.

   (b) ϕ_0 ist injektiv $\Rightarrow \phi_0^{-1}(0) = 0$ und also $(\phi_0^{-1} \circ g_1)(z) = 0$

   (c) Da $(\phi_0^{-1} \circ g_1)(z) = 0$ gibt es ein $v \in V_1$ mit
   $$f_1(v) = (\phi_0^{-1} \circ g_1)(z) = 0$$
   (kommutativ). Mit $v \in$ Kern f_1 folgt:
   $$\exists x \in V_2 \text{ mit } f_2(x) = v$$
   Betrachte
   $$\begin{aligned} (\phi_1 \circ f_2)(x) &= (g_2 \circ \phi_2)(x) \\ \phi_1(v) &= g_2(y) \end{aligned}$$

(d) $(g_2 \circ \phi_2)(x) - g_2(y) = g_2(\phi_2(x) - y) = 0$. Dies folgt aus der Linearität der Abbildungen. $\Rightarrow \phi_2(x) - y \in \text{Kern } g_3$ (exakt). Das ergibt:

$$\begin{array}{rll} \exists a \in W_3 & \text{mit} & g_3(a) = \phi_2(x) - y \\ \exists b \in V_3 & \text{mit} & \phi_3(b) = a \qquad \text{da } \phi_3 \text{ surjektiv} \end{array}$$

(e) Die Resultate von *d)* ergeben mit der Kommutativität:

$$\begin{aligned} (\phi_2 \circ f_3)(b) &= (g_3 \circ \phi_3)(b) = \phi_2(x) - y \\ \Longrightarrow y &= \phi_2(x) - (\phi_2 \circ f_3)(b) = \phi_2(x - f_3(b)) \end{aligned}$$

Also stellt $x - f_3(b)$ das gesuchte Urbild dar.

Bemerkung: aus dem Beweis folgt direkt folgende Verschärfung:
a) Sind ϕ_3 und ϕ_1 injektiv und ϕ_4 surjektiv, so ist ϕ_2 injektiv
b) Sind ϕ_3 und ϕ_1 surjektiv und ϕ_0 injektiv, so ist ϕ_2 surjektiv

Aufgabe 11P

Sei $(V, <,>)$ ein euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung. Man beweise: $<f(x), f(y)> = <x, y>$ für alle $x, y \in V \Longleftrightarrow \|f(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in V$.

Beweis

1. Sei $<f(x), f(y)> = <x, y> \ \forall x, y \in V$
   Dann folgt insbesondere:

$$\begin{aligned} <f(x), f(x)> &= <x, x> \\ \|f(x)\|^2 &= \|x\|^2 \\ \|f(x)\| &= \|x\| \end{aligned}$$

   nach Definition von $\|x\|$.

2. Sei $\|f(x)\| = \|x\|$.
   Damit folgt aus $\|x + y\| = \|f(x + y)\|$:

$$\begin{aligned} <f(x+y), f(x+y)> &= <f(x) + f(y), f(x+y)> \\ &= <f(x), f(x+y)> + <f(y), f(x+y)> \\ &= <f(x), f(x)> +2 <f(x), f(y)> + <f(y), f(y)> \end{aligned}$$

   und mit $<f(x), f(x)> = <x, x>$:

$$\begin{aligned} <x+y, x+y> &= <x, x> +2 <x, y> + <y, y> \\ &= <f(x), f(x)> +2 <x, y> + <f(y), f(y)> \end{aligned}$$

   Gleichsetzen ergibt nun:

$$\begin{aligned} \|f(x)\|^2 + 2 <x, y> + \|f(y)\|^2 &= \|f(x)\|^2 + 2 <f(x), f(y)> + \|f(y)\|^2 \\ <x, y> &= <f(x), f(y)> \end{aligned}$$

Aufgabe 12P

Sei $(V, <,>)$ ein zweidimensionaler euklidischer Vektorraum und $f : V \to V$ eine orthogonale lineare Abbildung, d.h. $< f(x), f(y) >=< x, y >$ für alle $x, y \in V$. Es gebe ferner ein $v_0 \in V$, $v_0 \neq 0$ mit $f(v_0) = v_0$, es sei jedoch $f \neq Id_V$. Man beweise: Ist (e_1, e_2) eine orthonormale Basis von V, dann ist die Matrix des Endomorphismus f bezüglich dieser Basis ein Element von $O(2) \setminus SO(2)$.

Beweis

Für die Abbildungsmatrix $A = M(f, (e_1, e_2), (e_1, e_2))$ gilt $<Ax, Ay> = <x, y>$ und somit $A \in O(2)$, denn $O(2)$ ist die Menge aller orthogonaler Matrizen (=Abbildungsmatrizen orthogonaler Abbildungen). Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass $A \notin SO(2) \Longrightarrow A \in O(2)\setminus SO(2)$ ist. Im 2. Teil des Beweises wird die Matrix noch explizit angegeben.

1. $A \notin SO(2)$
   Gegenannahme: es sei $A \in SO(2)$. Nach dem Satz auf Seite 80 hat A die Form

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \mp\sin\phi \\ \sin\phi & \pm\cos\phi \end{pmatrix}$$

   wobei das obere Vorzeichen für $A \in SO(2)$ gilt. Dies voraussetzend, wird mit $Av_0 = v_0 = v_1e_1 + v_2e_2$:

   $$\begin{aligned} (A - Id_V)v_0 &= 0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi - 1 & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ \Longrightarrow v_1(\cos\phi - 1) - v_2\sin\phi &= 0 \\ v_1\sin\phi + v_2(\cos\phi - 1) &= 0 \end{aligned}$$

   v_1 und v_2 sind Koordinaten von v_0 bezüglich der Basis (e_1, e_2). Multipliziert man die erste Gleichung mit v_2 und die zweite mit v_1 und addiert dann, so ergibt sich: $v_1 = 0$ und/oder $v_2 = 0$ oder $\phi = 0$. Ist entweder $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ so ergibt Einsetzen ebenfalls $\phi = 0$. Der Fall $v_0 = 0$ ist ausgeschlossen. Nun stellt $\phi = 0$ einen Widerspruch zu $A \neq Id_V$ dar; d.h. $A \notin SO(2)$

2. Konstruktion der Matrix A.
   Sei $v_0 = v_1e_1 + v_2e_2$ gegeben. OEA sei $\|v_0\| = 1$ angenommen; für den allgemeinen Fall ersetze man überall v_i in den trig. Ausdrücken durch $\frac{v_i}{\|v_0\|}$. Setze

   $$\cos\phi = v_1 \Longrightarrow \sin\phi = v_2$$

   Behauptung: die Matrix

   $$A = \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}$$

   ist die Abbildungsmatrix von f bezüglich der Basis (e_1, e_2).
   Beweis: zu zeigen ist

   $$\begin{aligned} Av_0 &= v_1 + v_2 \\ &= v_1(\cos 2\phi + \sin 2\phi) + v_2(\sin 2\phi - \cos 2\phi) \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} v_1(\cos 2\phi + \sin 2\phi) &= v_1(1 - 2\sin^2\phi + 2\sin\phi\cdot\cos\phi) \\ &= v_1 + 2v_1^2 v_2 - 2v_1 v_2^2 \\ v_2(\sin 2\phi - \cos 2\phi) &= v_2(2\sin\phi\cdot\cos\phi + 1 - 2\cos^2\phi) \\ &= v_2 + 2v_1 v_2^2 - 2v_1^2 v_2 \end{aligned}$$

und damit wird:

$$\begin{aligned} Av_0 &= v_1 + 2v_1^2 v_2 - 2v_2 v_2^2 + v_2 + 2v_1 v_2^2 - 2v_1^2 v_2 \\ &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Damit ist für jedes f mit $f(v_0) = v_0$, $v_0 \neq 0$ eine Matrix in $O(2) \setminus SO(2)$ gefunden.

5 Matrizenrechnung

Aufgabe 13
Man beweise: für A, $B \in M(n \times n, K)$ gilt:

$$rg(A) + rg(B) - n \leq rg(AB) \leq \min(rg(A), rg(B))$$

Beweis

1. $rg(AB) \leq rg(A)$ und $rg(AB) \leq rg(B)$
   Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt:

   $$rg(AB) \leq \min\{rg(A), rg(B)\} \iff \dim \operatorname{Kern}(AB) \geq \max\{\dim \operatorname{Kern}(A), \dim \operatorname{Kern}(B)\}$$

   Sei $x \in \operatorname{Kern}(B)$. Dann folgt $Bx = 0 \Rightarrow (AB)x = 0$ also $\operatorname{Kern}(B) \subset \operatorname{Kern}(AB)$. Somit bleibt $rg(AB) \leq rg(A)$ zu zeigen. Beachte $rg(AB) = \dim A(B(\mathbf{R}^n)) \leq \dim A(\mathbf{R}^n) = rg(A)$, denn $B(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^n$.

2. $rg(A) + rg(B) - n \leq rg(AB)$
   Es ist:

   $$\begin{aligned} n &= \dim \operatorname{Kern}(AB) + rg(AB) \\ &= \dim \operatorname{Kern}(A) + rg(A) \\ &= \dim \operatorname{Kern}(B) + rg(B) \end{aligned}$$

   und daraus folgt:

   $$\dim \operatorname{Kern}(A) + rg(A) + \dim \operatorname{Kern}(B) + rg(B) = \dim \operatorname{Kern}(AB) + rg(AB) + n$$

   Behauptung: es gilt $\dim \operatorname{Kern}(A) + \dim \operatorname{Kern}(B) \geq \dim \operatorname{Kern}(AB)$. Damit folgt direkt:

   $$rg(A) + rg(B) \leq rg(AB) + n$$

Beweis der Behauptung:
Es sei

$$\begin{array}{rl} (v_1, \dots, v_r) & \text{Basis von Kern}(A),\ \dim \text{Kern}(A) = r \\ (v_{r+1}, \dots, v_{r+s}) & \text{Basis von Kern}(B),\ \dim \text{Kern}(B) = s \end{array}$$

und angenommen sei $\text{Kern}(A) \cap \text{Kern}(B) = \{0\}$. Für $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} (BA)x &= B(\beta_{r+1}v_{r+1} + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= \gamma_{r+s+1}v_{r+s+1} + \cdots + \gamma_n v_n \end{aligned}$$

Damit ist (aus Symmetriegründen ist $\dim \text{Kern}(AB) = \dim \text{Kern}(BA)$):

$$\dim \text{Kern}(AB) = r + s = \dim \text{Kern}(A) + \dim \text{Kern}(B)$$

Sei nun $\text{Kern}(A) \cap \text{Kern}(B) \neq \{0\}$. OEA sei $(v_1, \dots, v_r)$ eine Basis von $\text{Kern}(A)$ und das Tupel $(v_{r-k}, \dots, v_{r+s-k})$ eine Basis von $\text{Kern}(B)$:

$$\begin{aligned} (BA)x &= B(\beta_{r+1}v_{r+1} + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= \gamma_{r+s+1-k}v_{r+s+1-k} + \cdots + \gamma_n v_n \end{aligned}$$

und damit:

$$\dim \text{Kern}(BA) = r + s - k \leq r + s$$

Die entsprechende Ungleichung gilt natürlich auch für AB. qed

Aufgabe 14

Sei (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unahbängig in dem reellen Vektorraum V. Man zeige: Ist

$$\begin{array}{rcrrrr} x_1 &=& & v_2 & -v_3 & 2v_4 \\ x_2 &=& v_1 & 2v_2 & -v_3 & -v_4 \\ x_3 &=& -v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array}$$

so ist (x_1, x_2, x_3) linear unabhängig.

Beweis

Wird A als Abbildung $K^n \to K^m$ aufgefasst, so ist $rg(A) = \dim \text{Im}\,(\text{A})$. Sei A die Abbildungsmatrix der Abbildung $f : K^4 \to K^4$, $x_i = f(v_i)$. Bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) ist A durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Soll (x_1, x_2, x_3) linear unabhängig sein, so muss gelten $rg(A) \geq 3$. Zeilenumformungen ergeben:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matriz hat also den Rang 3. Da der Rang stets dem Spaltenrang entspricht, sind die 3 Spaltenvektoren $y_i = (A_{1i}, \dots, A_{4i})$ unabhängig und es gilt $y_i = x_i \mid$ was aus der Definition der Matrix direkt folgt.

Aufgabe 15

Man bestimme, für welche $\lambda \in \mathbf{R}$ die reelle Matrix

$$A_\lambda \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist und berechne für dieses λ die inverse Matrix A_λ^{-1}.

Lösung

Die Matrix A wird durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht; durch die gleichen Operationen entsteht aus der Einheitsmatrix I die Inverse zu A:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & -\lambda & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & -\lambda & 1-\lambda^2 & 0 \\ -\lambda^3 & \lambda^2 & -\lambda(1-\lambda^2) & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $1-\lambda^2$ und der zweiten Zeile mit λ und Subtraktion der zweiten von der ersten Zeile ergibt:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \sim \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & -\lambda & 1-\lambda^2 & 0 \\ -\lambda^3 & \lambda^2 & \lambda(1-\lambda^2) & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} \sim \frac{1}{1-\lambda^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & -\lambda & 1-\lambda^2 & 0 \\ -\lambda^3 & \lambda^2 & \lambda(1-\lambda^2) & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}$$

I ist also die Inverse zu A_λ für $1-\lambda^2 \neq 0$.

Aufgabe 4*

Man beweise den folgenden Satz:

Satz: Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$ haben genau dann denselben Rang, wenn es invertierbare Matrizen $P \in M(m \times m, K)$ und $Q \in M(n \times n, K)$ mit $PA = BQ$ gibt.

Beweis
Annahme: $PA = BQ$, P,Q invertierbar.
Q ist invertierbar, hat also den Rang n. Die der Matrix zugeordnete Abbildung ist also surjektiv und bijektiv, also ein Isomorphismus. Damit gilt offensichtlich $\dim \mathrm{Im BQ} = \dim \mathrm{Im B} = \mathrm{r}$. (ein Isomorphismus führt unabhängige Vektoren in unabhängige über)
Analog folgt: $\dim \mathrm{Im\,PA} = \dim \mathrm{Im\,A} = \mathrm{r}'$ und damit $r = r'$.
Annahme: A und B haben gleichen Rang.
Zum Beweis werden die Isomorphismen P und Q konstruiert.
Gegeben sei $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$. Man betrachte nun die zu den Matrizen gehörigen linearen Abbildungen $f_A : V \to U$ und $f_B : V' \to W$. $(v_1, \ldots, v_n)$ sei Basis von V, $(v_1', \ldots, v_n')$ eine Basis von V' und $(v_1, \ldots, v_k)$,$(v_1', \ldots, v_k')$ die Basen der Kerne von f_A resp. f_B.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V} \arrow[r, "f_A"] \arrow[d, "f_Q"', "\cong"] & \mathrm{U} \arrow[d, "f_P"', "\cong"] \\
\mathrm{V'} \arrow[r, "f_B"'] & \mathrm{W}
\end{tikzcd}$$

Konstruktion von Q: Mit der folgenden Definition wird f_Q offenbar zu einem Isomorphismus $V \to V'$, der den Kern von f_A auf den Kern von f_B abbildet (numm. entsprechend):

$$f_Q(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 v_1' + \cdots + \alpha_n v_n'$$

Konstruktion von P: Betrachte die Zusammensetzung $(f_B \circ f_Q)$:

$$(f_B \circ f_Q)(x) = f_B(\alpha_1 v_1' + \cdots + \alpha_n v_n') = \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_r w_r$$

Andererseits ist nach geeigneter Umnummerierung der Vektoren:

$$f_A(x) = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r$$

(A und B haben den gleichen Rang r). Mit der folgenden Definition ist f_P ein Isomorphismus auf den Bildern der Abbildungen:

$$f_P(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_r u_r) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_r w_r$$

Durch natürliche Fortsetzung auf ganz U resp. W ist f_P ein Isomorphismus $U \to W$. Mit dieser Tatsache gilt $P \in M(m \times m, K)$ und $\mathrm{rg\ P} = \mathrm{m}$, also P invertierbar. Die Folgerung für Q ist analog.

Aufgabe 13P
Man gebe zwei Matrizen A, $B \in M(6 \times 6, \mathbf{R})$ explizit an, die folgende Eigenschaften haben: $rg(A) = rg(B) = 3$, $AB = 0$.

Lösung
Durch Ausrechnen überzeugt man sich leicht, dass die folgenden Matrizen die verlangten

Eigenschaften besitzen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 15P

Sei

$$H_t \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sin 2\pi t & \sin \frac{\pi}{6}t \\ \cos 2\pi t & \cos \frac{\pi}{6}t \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbf{R}$. Man bestimme für jedes t mit $0 \leq t \leq 12$ den Rang der Matriz H_t und gebe insbesondere an, für wieviele dieser t der Rang gleich Eins ist.

Lösung

Im allgemeinen ist rg H = 2. Der Rang der Matrix ist in 2 Fällen 1: H_t enthält eine Nullzeile oder die Zeilenvektoren sind kollinear.

1. H hat eine Nullzeile
   $\sin 2\pi t = 0$ und $\sin \frac{\pi}{6}t = 0 \Rightarrow t \in \{0, 6, 12\}$
   $\cos 2\pi t = 0$ und $\cos \frac{\pi}{6}t = 0 \Rightarrow t \in \{0, 3, 9\}$ eingesetzt in $\cos 2\pi t$ ergibt keine Nullstelle

2. H hat linear abhängige Zeilenvektoren
   Setze
   $$x_1 = \frac{\sin 2\pi t}{\cos 2\pi t} \qquad x_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}t}{\cos \frac{\pi}{6}t}$$
   Die Variable t wird zerlegt in eine ganzahligen und einen gebrochenen Anteil:
   $t = n + \Delta t \;\; 0 \leq \Delta t < 1$. Damit wird:
   $$x_1 = \frac{\sin 2\pi\Delta t}{\cos 2\pi\Delta t} \qquad x_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{6}(n + \Delta t)}{\cos \frac{\pi}{6}(n + \Delta t)}$$
   Da $x_1 = \tan 2\pi\Delta t$ und $x_1 = \tan \frac{\pi}{6}(n + \Delta t)$ und der Tangens im Intervall $-\frac{\pi}{2} \ldots \frac{\pi}{2}$ injektiv ist, bleibt festzustellen, wann die Argumente gleich sind. In diesem Fall ist $x_1 = x_2$ und die Zeilenvektoren sind kollinear.
   Sei
   $$\begin{aligned} 2\pi\Delta t &= \frac{\pi}{6} \cdot (n + \Delta t) \\ \Longrightarrow \Delta t &= \frac{n}{11} \end{aligned}$$
   $\Rightarrow t \in \{n + \frac{n}{11} | 0 \leq n \leq 11\}$. Voraussetzung dabei ist:
   - $\cos \frac{\pi}{6}t \neq 0$ andernfalls siehe Punkt 1)
   - $\cos 2\pi \cdot \Delta t \neq 0 \Rightarrow t \neq \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$. Andernfalls hat H folgende Form:
   $$H_t = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Da aber $b \neq 0$ für $t \notin \{3,9\}$ ist $\operatorname{rg} \mathrm{H} = 2$.
Sei nun (der Tangens ist periodisch mit Periode π)

$$\begin{aligned} 2\pi\Delta t &= \frac{\pi}{6} \cdot (n + \Delta t) + \pi \\ \Longrightarrow \Delta t &= \frac{n}{11} + \frac{6}{11} \end{aligned}$$

Damit folgt nun:

$$\operatorname{rg} \mathrm{H_t} = 1 \text{ fr } \mathrm{t} \in \{0, 1 + \frac{1}{11}, 2 + \frac{2}{11}, \ldots, 12, \frac{6}{11}, 1 + \frac{7}{11}, \ldots, 10 + \frac{16}{11}\}.$$

6 Determinanten

Aufgabe 16
Ist $A \in M(n \times n, K)$, so nennt man jede Matrix, die durch Weglassen von Zeilen und Spalten entsteht, eine Teilmatrix von A. Man beweise: Die größte Zeilenzahl, die bei denjenigen quadratischen Teilmatrizen von A auftritt, deren Determinante nicht verschwindet, ist gleich dem Rang von A.

Beweis
Sei $A_i = (A_{i1}, \ldots, A_{in})$ ein Zeilenvektor von A. Mit $\tilde{A}_i$ sei der i-te Zeilenvektor bezeichnet, der aus A_i durch Streichen von n-r Spalten entsteht:

$$\tilde{A}_i = (A_{i,i_1}, \ldots, A_{i,i_r}), \quad i_k \geq k, \; i_k \neq i_m \text{ fr } k \neq m$$

OEA sei angenommen $i_k = k$. Vorbemerkung: $\{A_i\}_{i=1}^k$ linear abhängig $\Rightarrow$ $\{\tilde{A}_i\}_{i=1}^k$ linear abhängig. Der Rang der Matrix ist gleich der Dimension des Bildraumes der Zeilenvektoren. Sei $r = \operatorname{rg} \mathrm{A} = \dim \operatorname{Im} \{\mathrm{A_i}\}$. Mehr als r Vektoren sind linear abhängig, d.h. mit der Vorbemerkung gilt: $\det\{\tilde{A}_i\} = 0$. Somit ist die grösste Zeilenzahl einer Teilmatrix mit $\det\{\tilde{A}_i\} \neq 0$ kleiner oder gleich $\operatorname{rg} \mathrm{A}$. Daß es andererseits eine quadratische Teilmatrix gibt, deren Zeilenzahl gleich dem Rang von A ist, folgt aus dem Beweis auf Seite 94 (durch Weglassen „linear überflüssiger“Zeilen und Spalten entsteht eine quadratische Teilmatrix mit linear unabhängigen Zeilen und Spalten).

Aufgabe 17
Man berechne die Determinante der reellen $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & & & \cdot & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

Lösung
Betrachte Zeilenvertauschungen: Ist n gerade, so bringen $n/2$ Zeilenvertauschungen die Matrix auf die Einheitsmatrix. Daraus folgt $\det A = (-1)^{\frac{n}{2}}$. Sei nun n ungerade, $n = 2k + 1$. Dann gilt mit vorherigem Resultat: $\det A = (-1)^k$. Die mittlere Zeile bleibt.

Aufgabe 18

In dem komplexen Vektorraum $\mathbf{C}^n$ betrachten wir die Vektoren

$$\begin{aligned} a_\nu &= (0,\dots,0, \underbrace{1}_{\nu-\text{te Stelle}}, 0,\dots,0) \qquad \nu = 1,\dots,n \\ b_\mu &= (0,\dots,0, \underbrace{i}_{\mu-\text{te Stelle}}, 0,\dots,0) \qquad \mu = 1,\dots,n \end{aligned}$$

Betrachtet man nun $\mathbf{C}^n$ als reellen Vektorraum, indem man die Skalarmultiplikation auf $\mathbf{R}\times\mathbf{C}^n$ einschränkt, so ist $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$ eine Basis des reellen Vektroraums $\mathbf{C}^n$. Wir definieren nun die folgenden beiden Orientierungen:

$$\begin{aligned} Or_1 &\stackrel{\text{def}}{=} Or(a_1,b_1,a_2,b_2,\dots,a_n,b_n) \\ Or_2 &\stackrel{\text{def}}{=} Or(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n) \end{aligned}$$

Man beweise: $Or_2 = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}Or_1$, wobei ein Minuszeichen vor einer Orientierung den Übergang zur entgegengesetzten Orientierung bedeutet.

Beweis

Der Beweis erfolgt durch Berechnung der Determinanten der Abbildung ϕ_n, die die Basisvektoren der Basis $(a_1,b_1,\dots,a_n,b_n)$ auf die entsprechenden Vektoren von $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n)$ abbildet (eine lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig festgelegt).
Behauptung : $\det\phi_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Dies ist gleichbedeutend zur Behauptung in der Aufgabenstellung.
Beweis: durch Induktion nach n. Für $n = 1$ ist $\phi = Id$ und die Behauptung gilt. Betrachte nun V mit $\dim V = n+1$ und nach Induktionsvoraussetzung gelte $\det\phi_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
Es sei $\phi_{n+1} = \psi\circ\phi'_n$ mit

$$\begin{aligned} \psi(a_i) &= a_i & i = 1,\dots,n \\ \psi(b_1) &= a_{n+1} \\ \psi(b_i) &= b_{n-1} & i = 2,\dots,n \\ \psi(a_{n+1}) &= b_n \\ \psi(b_{n+1}) &= b_{n+1} \end{aligned}$$

ψ wirkt auf die Basisvektoren wie die Permutation

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n & b_1 & b_2 & \cdots & b_n & a_{n+1} & b_{n+1} \\ a_1 & \cdots & a_n & a_{n+1} & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & b_{n+1} \end{pmatrix}$$

ϕ'_n wirke auf $[a_1,\dots,b_n]$ wie ϕ_n und auf $[a_{n+1},b_{n+1}]$ wie die Identität. Natürlich gilt
$\det\phi_{n+1} = \det\psi\cdot\det\phi'_n$. Da die Einschränkung von ϕ'_n auf den durch $a_1,\dots,b_n$ erzeugten Unterraum wie ϕ_n und auf $[a_{n+1},b_{n+1}]$ wie die Identität wirkt , gilt $\det\phi'_n = \det\phi_n$, wie ein Blick auf die Matrixdarstellung sofort zeigt. Wegen $\det\phi_{n+1} = \det\psi\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ bleibt zu zeigen, daß $\det\psi = (-1)^{\frac{(n+1)n}{2}-\frac{n(n-1)}{2}} = (-1)^n$ ist. ψ hat bezüglich der in der Festlegung von

Or_2 benützten Basis die folgende $(2n+2) \times (2n+2)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & & & & \\ & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & & 1 & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Vertauschen jeweils aufeinanderfolgender Zeilen läßt sich diese Matrix in die Einheitsmatrix überführen. Wie sich zeigt, sind dazu n Vertauschungen notwendig, d.h. $\det \psi = (-1)^n$, was zu zeigen war.

Aufgabe 5*

Es seien $f_\nu : [0,1] \to \mathbf{R}^n$, $\nu = 1, \dots, n$ stetige Abbildungen, so daß für jedes $t \in [0,1]$ das n-Tupel $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ eine Basis von $\mathbf{R}^n$ ist. Man beweise:

$$(f_1(0), \dots, f_n(0)) \text{ und } (f_1(1), \dots, f_n(1))$$

sind gleichorientiert.

Beweis

Betrachte den Automorphismus $\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ definiert durch $\phi(f_i(0)) = f_i(1)$. Dann gilt nach Definition (Seite 122):

$$(f_i(0)) \text{ und } (f_i(1)) \text{ gleichorientiert } \Leftrightarrow \det \phi > 0$$

Gegenannahme: $\det \phi < 0$.Dann gilt:

$$M(\phi, (f_i(0)), (f_i(1)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

mit einer ungeraden Anzahl von -1 in der Diagonalen. OEA sei $M_{kk} = -1$. Damit ist $f_k(0) > 0$ und $f_k(1) < 0$ oder umgekehrt. Da f_k eine stetige Abbildung ist, folgt nach dem Nullstellensatz von Bolzano-Weierstrass die Existenz eines $\xi \in (0,1)$ mit $f_k(\xi) = 0$. Damit ist aber $(f_i(\xi))$ keine Basis im Widerspruch zur Voraussetzung. $\Rightarrow$ ϕ kann also nicht orientierungsumkehrend sein, qed.

Aufgabe 18P

In einem dreidimensionalen orientierten Vektorraum V sei (v_1, v_2, v_3) eine orthonormale Basis, $x = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ und $y = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3$. Man zeige: Sind x und y linear unabhängig, dann ist

$$B = (x, y, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix})$$

eine positiv orientierte Basis von V.

Beweis

1. B ist linear unabhängig $\Rightarrow B$ ist eine Basis
Ansatz:

$$\xi_1(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3) + \xi_2(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3) + \xi_3 \cdot \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix} = 0$$

Zeige $\xi_i = 0 \ \ \forall i$. Ordne obigen Ausdruck nach v_i:

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

mit

$$\begin{aligned} k_1 &= \xi_1\lambda_1 + \xi_2\mu_1 + \xi_3(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) \\ k_2 &= \xi_1\lambda_2 + \xi_2\mu_2 + \xi_3(\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3) \\ k_3 &= \xi_1\lambda_3 + \xi_2\mu_3 + \xi_3(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) \end{aligned}$$

Das ergibt ein Gleichungssystem in ξ_i mit der Koeffizientenmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \end{pmatrix}$$

Ist M regulär, so hat das System nur die Lösung $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$; d.h. B ist linear unabhängig. Berechne die Determinante von M durch Umformen und Entwickeln (wobei OEA angenommen wird, daß $\lambda_1 \neq 0$):

$$\begin{aligned} |M| &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2 \\ 0 & \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 & \lambda_1(\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3) - \lambda_2(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) \\ 0 & \lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1 & \lambda_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1) - \lambda_3(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) \end{vmatrix} \\ &= \lambda_1[\lambda_1(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2 - \lambda_3(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2) + \lambda_1(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)^2 + \\ &\quad + \lambda_2(\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)] \\ &= \lambda_1^2[(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2 + (\lambda_1\mu_3 - \lambda_3\mu_1)^2 + (\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)^2] \end{aligned}$$

Behauptung: $\det M > 0$. Gegenannahme $\det M = 0$. Mit $\lambda_1 \neq 0$ folgt:

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2\mu_1}{\mu_2} \qquad \lambda_1 = \frac{\lambda_3\mu_1}{\mu_3} \qquad \Longrightarrow \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{\lambda_2}{\mu_2} = \frac{\lambda_3}{\mu_3} \quad \text{falls } \mu_i \neq 0$$

Durch Diskussion aller möglichen Fälle (je zwei entspr. Koordinaten sind entweder Vielfache voneinander oder beide 0. Aus $\mu_1 = 0$ folgt sofort $y = 0$) ergibt sich, dass y entweder der Nullvektor ist oder x und y linear abhängig sind im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt $\det M > 0$ und B ist eine Basis von V.

2. Ergänzung: $x \times y$ ist orthogonal zu x und y.

$$
\begin{aligned}
<x, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}> &= \lambda_1 <v_1, v_1(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)> + \lambda_2 <v_2, v_2(\lambda_3\mu_1 - \lambda_1\mu_3)> \\
&\quad + \lambda_3 <v_3, v_3(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)> \\
&= \lambda_1\lambda_2\mu_3 - \lambda_1\lambda_3\mu_2 + \lambda_2\lambda_3\mu_1 - \lambda_2\lambda_1\mu_3 + \lambda_3\lambda_1\mu_2 - \lambda_3\lambda_2\mu_1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Analog folgt $<y, \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}>= 0$.

3. B ist positiv.
Nimm die positive Basis $(e_1, e_2, e_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. Definiere die lineare Abbildung $f : V \to V$ durch $f(e_i) = w_i$ mit $w_1 = x$, $w_2 = y$, $w_3 = x \times y$. Zeige: f ist orientierungserhaltend oder gleichbedeutend $\det f > 0$. Nun gilt:

$$\det f = \det M(f, \epsilon, \epsilon) = \det M > 0$$

mit der Matrix M von Punkt 1.

7 Lineare Gleichungssysteme

Aufgabe 19

Man ermittle durch Rangbestimmungen, ob das folgende relle Gleichungssystem lösbar ist und berechne gegebenenfalls die Lösungsmenge:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 2 \\
7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 3 \\
5x_1 + 7x_2 + 9x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Lösung

Durch Zeilenumformungen ergibt sich ein Widerspruch in den zwei letzten Zeilen:

$$
A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 7 & 8 & 9 & 3 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -2 \\ 0 & -6 & -12 & -4 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right)
$$

Aufgabe 20

Man führe für das folgende reelle Gleichungssystem den Gaußschen Algorithmus durch, entscheide ob das Gleichungssystem lösbar ist und bestimme gegebenenfalls die Lösungsmenge:

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 3x_4 & = 7 \\
4x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = 9 \\
2x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & & & = -2 \\
3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = -2
\end{array}
$$

Lösung

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 3 & 1 & 9 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & 13 & -19 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 11 & -23 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 & 6 & -16 \\ 0 & 2 & -7 & 11 & -23 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -10 \end{array}\right)$$

Damit ist das System eindeutig lösbar. Es ergeben sich folgende Resultate:

$$x_1 = \frac{10}{9} \qquad x_2 = \frac{11}{9} \qquad x_3 = \frac{17}{9} \qquad x_4 = -\frac{10}{9}$$

Aufgabe 21

Man beweise:

Ist $U \subset K^n$ eine Untervektorraum und $x \in K^n$, so gibt es ein Gleichungssystem mit Koeffizienten in K für n Unbekannte, dessen Lösungsmenge genau $x + U$ ist.

Beweis

Definiere $f : K^n \to K^n$ mit Kern f = U. Sei $A = M(f, \epsilon, \epsilon) \in M(n \times n, K)$ die zugehörige Abbildungsmatrix. Sei $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$. Setze

$$\begin{array}{lccc} a_{11}v_1 + & \dots & +a_{1n}v_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}v_1 + & \dots & +a_{nn}v_n & = & b_n \end{array} \qquad \text{mit} \quad a_{ij} := A_{ij}, \quad b_i := (Ax)_i$$

Dann gilt für $v = x + u$ mit $u \in U$: $Av = Ax + Au = Ax + 0 = b$. Also ist U sicher der Lösungsraums des hom. Systems und $x+U$ eine Teilmenge der Lösungsmenge. $x+U$ ist aber genau gleich der Lösungsmenge: Jeder Vektor v aus V läßt sich in eindeutiger Weise in der Form $v = u^\perp + u$, $u^\perp \in U^\perp, u \in U$ schreiben. Aus $Av = Au^\perp$ und der Surjektivität von f auf Bild f folgt, dass $u^\perp = A^{-1}b$ sein muß. Falls $u^\perp \neq x$ ist, folgt aus $Au^\perp = b = Ax$, daß sich $u^\perp$ in der Form $x + u^*$ mit $u^* \in U, u^* = u^\perp - x$ darstellen läßt. Also sind genau die Vektoren Lösungen, die Element von $x + U$ sind.

Aufgabe 6*

Zwei Körper nennt man isomorph (geschrieben $K \cong K'$), wenn es einen Körperisomorphismus $f : K \to K'$, gibt, d.h. eine bijektive Abbildung mit $f(x + y) = f(x) + f(y)$ und $f(xy) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in K$. Man beweise: Hat ein lineares Gleichungsssytem mit Koeffizienten in dem Körper K genau drei Lösungen, so ist $K \cong \mathbf{F}_3$.

Beweis
Die Theorie über die Lösung von Gleichungssystemen wurde unabhängig vom verwendeten Grundkörper formuliert. Da das System mehr als eine Lösung hat, kann die Koeffizientenmatrix A des Gleichungssystems $Ax = b$ nicht regulär sein. Sei also $\mathrm{rg\ A = n - r}$, wobei n die Anzahl der Variablen bedeute und $r > 0$ eine ganze Zahl. Der Körper K kann nur endlich viele Elemente haben (sonst wäre die Lösungsmenge ein affiner Teilraum mit unendlich vielen Elementen). Hat der Körper p Elemente, so hat K^n genau p^n Elemente. Ist $\mathrm{rg\ A = n - r}$, so ist die Lösungsmenge ein r-dimensionaler affiner Teilraum, hat somit p^r Elemente. Aus $p^r = 3$ folgt $p = 3$, $n = 1$. Somit hat der Körper 3 Elemente. Da alle endlichen Körper mit der gleichen Anzahl Elemente isomorph sind, ist K isomorph zu $\mathbf{F}_3$. Dies kann man sofort (im vorliegenden Spezialfall) verifizieren, wenn man beachtet, daß die Struktur von K eindeutig festgelegt ist: Ist $K = \{0, 1, a\}$, so sind die Addition und Multiplikation bis auf $1+a, a+a, a\cdot a$ bereits festgelegt. Es kann aber nur $1 + a = 0$, $a + a = a$, $a \cdot a = a$ sein, alles andere ergibt Widersprüche zu den Axiomen (oder impliziert $a = 0$ oder 1).

Aufgabe 7*
Sei V ein orientierter reller Vektorraum und $U \subset V$ ein orientierter Untervektorraum mit $0 < \dim U < \dim V$. Wählt man Basen $(u_1, \ldots, u_r)$ von U mit $Or(u_1, \ldots, u_r) = Or(U)$ und $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ von V/U und Elemente $v_1, \ldots, v_{n-r} \in V$ mit $\pi(v_i) = w_i$, wobei $\pi : V \to V/U$ die Projektion ist, so ist auch $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r})$ eine Basis von V. Gilt dann $Or(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}) = Or(V)$, so definieren wir

$$Or(V/U) := Or(w_1, \ldots, w_{n-r})$$

Man zeige: Diese Orientierung von V/U ist nur von den Orientierungen von V und U, aber nicht von der Wahl der Basen abhängig.

Beweis
Nach Voraussetzung sind alle gewählten Basen von U gleichorientiert. Sei $(u'_1, \ldots, u'_r)$ eine solche und sei $(u'_1, \ldots, u'_r, v'_1, \ldots, v'_{n-r})$ eine Basis von V, die gleich wie V orientiert ist, mit $\pi(v'_i) = w'_i$ für eine beliebige, vorgängig gewählte Basis (w'_i) von V/U (Voraussetzung). Die Matrix von $f : V \to V$ definiert durch $f(u'_i) := u_i$, $f(v'_i) := v_i$ hat eine positive Determinante da nach Voraussetzung

$$Or(u'_1, \ldots, u'_r, v'_1, \ldots, v'_{n-r}) = Or(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-r}) = Or(V)$$

ist. Es gilt nun mit $C := M(f, (u'_1, \ldots, v'_{n-r}))$

$$\begin{aligned}\det\ C &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & & & \\ \vdots & & \vdots & & * & \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & & & \\ & & & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & b_{n-r,1} & \cdots & b_{n-r,n-r} \end{vmatrix} =: \begin{vmatrix} A & * \\ 0 & B \end{vmatrix} > 0 \\ &= \det A \cdot \det B\end{aligned}$$

(man beachte $f(u'_i) \in U$ und die Rechenregeln für Blockmatrizen). Nun ist $\det A$ gleich der Determinante der Abbildung $f_{|U}$, die nach Voraussetzung orientierungserhaltend ist. Somit ist

$\det A > 0$ und damit auch $\det B > 0$. Somit sind (v_i') und (v_i) gleichorientiert. Die Projektion ist auf $[v_1' \ldots, v_{n-r}'] = U'$ ein Isomorphismus und bildet auch die Orientierungen von U' und V/U aufeinander ab (die Bilder von gleichorientierten Basen sind gleichorientiert u.u). Darum sind auch $(w_1', \ldots, w_{n-r}')$ und $(w_1, \ldots, w_{n-r})$ gleichorientiert. Damit ist $Or(V/U)$ nicht von der Wahl der Basen abhängig. Der Beweis zeigt auch, daß die Orientierungen von V und U wesentlich sind.

Aufgabe 8*

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Man beweise: Hat f bezüglich jeder Basis von V dieselbe Matrix A, d.h. $A = \phi^{-1} f \phi$ für alle Isomorphismen $\phi : K^n \overset{\cong}{\to} V$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $f = \lambda Id_V$.

Beweis

($char K \neq 2$) Sei $A = (a_{ij})$ die Matrix von f bezüglich einer Basis. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine orthonormale Basis von V. Wähle nun den Isomorphismus speziell:

$$\phi^*(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \alpha_1 v_1 + \cdots - \alpha_n v_n$$

mit $\alpha_i \in K$. Für die inverse Abbildung gilt dann

$$\phi^{*-1}(\beta_1 v_1, \ldots, \beta_n v_n) = \beta_1 + \cdots - \beta_n$$

Die Spalten der Matrix sind die Bilder der Einheitsvektoren, hier also

$$\phi^{*-1} f \phi^*(1, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n-1,1} \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

und entsprechend für die anderen Einheitsvektoren. Für v_n gilt aber nun

$$\phi^{*-1} f \phi^*(0, \ldots, 0, 1) = \begin{pmatrix} -a_{1n} \\ \vdots \\ -a_{n-1,n} \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Damit hat $A^* := \phi^{*-1} f \phi^*$ die Form

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und aus der Bedingung $A = A^*$ folgt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Wähle nun den Isomorphismus wieder neu:

$$\phi_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := \alpha_1 v_1 + \cdots - \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n$$

und führe obige Betrachtungen für alle i durch. Daraus ergibt sich A zu

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Behauptung: alle Diagonalelemente sind gleich.
Beweis: Sei π eine Permutation und definiere den Isomorphismus durch $\phi(\epsilon_i) := v_{\pi(i)}$ (ϵ_i ist der i-te Einheitsvektor des K^n). Dann gilt

$$\phi^{-1} f \phi(\epsilon_1) = (a_{\pi(1),\pi(1)}, 0, \ldots, 0)$$

Da die Matrizen gleich sind nach Voraussetzung, folgt $a_{11} = a_{\pi(1),\pi(1)}$. Da die Permutation beliebig gewählt werden kann, muß offensichtlich $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$ sein. Die Matrix ist also gleich $a_{11}E$. Gleichbedeutend ist $f = a_{11} Id_V$.
Die Beweismethode versagt, falls char K=2 ist. Für diesen Fall sei ein alternativer Beweis angegeben, der unabhängig von der Charakteristik ist.
Die zu beweisende Behauptung besagt in Matrizenschreibweise:

$$A = S^{-1} \cdot A \cdot S \Longleftrightarrow S \cdot A = A \cdot S \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} S_{ik} A_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} S_{kj} \qquad \forall i, j \tag{5}$$

wobei S die Abbildungsmatrix von ϕ bez. beliebiger Basen von K^n und V ist. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n, der Dimension von V. Induktionsverankerung : n=2. Für char K$\neq$ 2 folgt die Behauptung aus dem obigen Beweis (s. dort). Für char K=2 ist zu zeigen, daß von den 16 möglichen 2×2-Matrizen nur die Nullabbildung und die Identität die verlangten Eigenschaften besitzen. Dazu sei durch folgende Matrix ein Isomorphismus $K^n \to V$ speziell gegeben: $S^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Eingesetzt in (2) ergibt sich sofort:

$$\begin{aligned} S^*_{12} A_{21} &= A_{12} S^*_{21} & &\Longrightarrow A_{12} = A_{21} \\ S^*_{21} A_{11} &= A_{22} S^*_{21} & &\Longrightarrow A_{11} = A_{22} \end{aligned}$$

D.h. A muß symmetrisch sein und die Diagonalelemente sind gleich. Damit bleibt zu zeigen, daß folgende Matrizen bezüglich verschiedener Basen nicht den gleichen Endomorphismus f beschreiben (OEA sei K=$\mathbf{F_2}$ angenommen): $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Man betrachte die Basen $\alpha = (v_1, v_2)$ und $\beta = (v_1, v_1 + v_2)$ von V. Beispielsweise gilt mit $\alpha_1 = v_1$, $\alpha_2 = v_2$, $\beta_1 = v_1$, $\beta_2 = v_1 + v_2$ und $\phi_\alpha(\epsilon_i) := \alpha_i$, $\phi_\beta(\epsilon_i) := \beta_i$:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1) &= v_2 = \alpha_2 & f(\alpha_2) &= v_1 = \alpha_1 \\ f(\beta_1) &= v_2 = \beta_2 - \beta_1 & f(\beta_2) &= v_2 + v_1 = \beta_2 \\ f'(\alpha_1) &= v_1 + v_2 = \alpha_1 + \alpha_2 & f'(\alpha_2) &= v_1 + v_2 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ f'(\beta_1) &= 2 \cdot v_1 + v_2 = \beta_1 + \beta_2 & f'(\beta_2) &= 2(v_1 + v_2) = 0 \neq \beta_1 + \beta_2 = v_2 \end{aligned}$$

Offensichtlich beschreibt die Matrix A (und A') verschiedene Endomorphismen f.
Induktionsannahme: die Matrix des auf einen Unterraum der Dimension $n-1$ eingeschränkten Endomorphismus $\pi_U \circ f$ habe die verlangte Form (π_U = Projektion auf U). Damit hat A folgende Gestalt:

$$A = \begin{pmatrix} a & & 0 & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & a & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Man betrachte nun die durch die folgenden Matrizen (bezüglich der gewählten Basis) gegebenen Isomorphismen:

$$S' = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \quad S'' = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \cdot & \\ \cdot & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \quad S''' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen in (2) findet man:

$$\begin{aligned} S'_{kk}A_{k1} = A_{kn}S'_{n1} \Longrightarrow A_{k1} &= A_{kn} \qquad k = 2 \ldots n-1 \\ S'_{n1}A_{11} = A_{nn}S'_{n1} \Longrightarrow A_{11} &= A_{nn} \end{aligned}$$

Damit hat die Spalte n die Form: $\begin{pmatrix} a_{1n} \\ 0 \\ \vdots \\ a \end{pmatrix}$. Setze nun S'' in (2) ein:

$$\begin{aligned} S''_{1n}A_{n1} = A_{1n}S''_{n1} \Longrightarrow A_{1n} &= A_{n1} \\ S''_{1n}A_{nj} = A_{1,n+1-j}S''_{n+1-j,j} \Longrightarrow A_{nj} &= A_{1,n+1-j} \end{aligned}$$

Die letzte Zeile hat also die Form $(a_{1n}, 0, \ldots, a)$. Somit ist nur noch A_{1n} zu bestimmen:

$$S'''_{21}A_{1n} = A_{2n}S'''_{nn} \Longrightarrow A_{1n} = A_{2n} = 0$$

Damit muß A die behauptete Gestalt haben (daß A dann bezüglich jeder Basis gleich ist, ist trivial).

Aufgabe 19P
Es sei

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 + & \ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \ldots & +a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten. Es sei <> ein Skalarprodukt und bezüglich dieses Skalarproduktes mögen die Spaltenvektoren $a_i := \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$,

$i = 1, \ldots, n$ senkrecht auf $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$ stehen. Außerdem sei $b \neq 0$.
Man beweise: Das Gleichungssystem ist unlösbar.

Beweis
Es sei $a_i \perp b, \forall i$. Mit $U := L(b)$ folgt $L(a_i : i = 1, \ldots, n) \subset U^{\perp}$. Es ist $x_1 a_1 + x_2 a_2 + \ldots + x_n a_n \in L(a_i : i = 1, \ldots, n) \subset U^{\perp}$ $(x_i \in \mathbf{R})$. Es gilt: $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ und mit $b \neq 0$ folgt sofort $b \notin U^{\perp}$, das bedeutet $x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \neq b$

Aufgabe 21P
Man gebe die mathematischen Gründe an, aus denen die Massenbestimmung nach dem im Grundkurs für Physiker geschilderten Verfahren unmöglich ist, wenn keine einzige der Massen (auch M_0 nicht) vorher bekannt ist. Ebenfalls erwünscht ist die Angabe eines physikalischen Grundes für diesen Umstand.

Lösung
Im Gleichungssystem ist die Spalte $b = (b_1, \ldots, b_n)$ unbekannt. Es laßen sich höchstens Massenverhältnisse bestimmen (sie sind durch das System eindeutig festgelegt). Die physikalische Interpretation besagt im wesentlichen das gleiche: die aus dem Impulserhaltungssatz gezogenen Folgerungen sind identisch, falls jede Masse vervielfacht wird. (d.h. die Stöße laufen gleich ab).

8 Affine Geometrie

Aufgabe 22
Sei

$$\begin{aligned} M_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 - 7 = 0\} \\ M_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | x_2 + 2x_3 - 6 = 0\} \\ M_3 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 | -4x_1 + x_2 + 7x_3 - 3 = 0\} \end{aligned}$$

Man beweise, daß M_1, M_2 und M_3 affine Hyperebenen des $\mathbf{R}^3$ sind und bestimme $M_1 \cap M_2 \cap M_3$.

Lösung
Jedes der M_i ist Lösungsmenge eines Gleichungssytems mit drei Variablen und einer Gleichung. Die Lösungsmengen sind nach Bemerkung 2 auf Seite 128 affine Teilräume. Aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt, daß die Dimension der zu den affinen Teilräumen gehörenden Unterräume gleich 3-1=2 ist (vgl. Notiz 1 auf Seite 129). Dann haben auch die M_i die Dimension 2, das heißt, sie sind affine Hyperebenen. Zur Veranschaulichung seien Basen für die Unterräume angegeben:

$$\begin{aligned} M_1 : &\quad (1, 0, -1), (0, 1, -1) \\ M_2 : &\quad (0, 2, -1), (1, 0, 0) \\ M_3 : &\quad (7, 0, 4), (0, 7, -1) \end{aligned}$$

Berechnung von $M_1 \cap M_2 \cap M_3$: ein $x \in M_1 \cap M_2 \cap M_3$ erfüllt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Umformen der erweiterten Koeffizientenmatrix führt zur Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ -4 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 11 & 31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

das bedeutet $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \{(2, 4, 1)\}$

Aufgabe 23

Wieviele verschiedene affine Geraden gibt es in dem Vektorraum $V = \mathbf{F}_2^n$ über $\mathbf{F}_2$?
(Man überlege sich zuerst: Wie sehen die 1-dimensionalen Untervektorräume von $\mathbf{F}_2$ aus? Es sind ja, wie in jedem Vektorraum über K, gerade die Untervektorräume, die eine Basis aus genau einem, von Null verschiedenen Element haben, also die Unterräume $L(v)$, wobei $v \neq 0$. Wie sieht $L(v)$ für $K = \mathbf{F}_2$ aus? Damit beweise man dann: $A \subset \mathbf{F}_2$ ist affine Gerade $\Leftrightarrow \ldots$ (vgl. S. 152). Damit hat man die Aufgabe auf ein einfaches kombinatorisches Problem reduziert. Man bestimme zuerst, wieviele Punkte $\mathbf{F}_2$ hat (etwa durch Induktion), und dann wieviele affine Geraden es gibt).

Lösung

$\mathbf{F}_2$ besteht aus 2 Elementen: 0 und 1. Die 1-dimensionalen Unterräume von $\mathbf{F}_2^n$ sind 2-elementige Mengen der Art $A_i = \{(0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)\}$ (mit nur einer 1 an der i-ten Stelle). Behauptung: $A \subset \mathbf{F}_2^n$ ist genau dann eine affine Gerade, wenn

$$A_i = \{(\delta_1, \ldots, 0, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_n), (\delta_1, \ldots, 1, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_n) | \delta_i \in \{0, 1\}\}$$

Beweis: A_i erfülle die geforderte Bedingung. Dann ist

$$A_i - (\delta_1, \ldots, 0, \delta_{i+1}, \ldots, \delta_n) = \{(0, \ldots, 0), (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\}$$

und dies ist ein 1-dim. Unterraum, qed. Sei umgekehrt A eine affine Gerade. Dann ist $A - v_0$, $v_0 \in A$ ein Unterraum: $A - v_0 = \{(0, \ldots, 0), (0, \ldots, 1, \ldots 0)\}$. Also hat A genau 2 Elemente. Sei $v_0 = (\delta_i)$, $v_0 \in \mathbf{F}_2$. Dann hat A die verlangte Form, wie man durch Addition von v_0 zu $A - v_0$ erkennt.
Nun hat $\mathbf{F}_2^n$ genau 2^n Punkte v_0. Außerdem gibt es n 1-dim. Unterräume A_i (s. oben). Damit sind $n \cdot 2^n$ Kombinationen $v_0 + A_i$ möglich. Allerdings sind für gegebenes A_i die affinen Geraden $v_0 + A_i$ und $v_1 + A_i$ identisch, wenn die Vektoren v_0, v_1 sich nur in der Koordinate i unterscheiden. Also gibt es $n \cdot 2^{n-1}$ verschiedene affine Geraden.

Aufgabe 24

Sei V ein positiv-dimensionaler reeller Vektorraum. Man zeige: Der Durchschnitt $A \cap A'$ zweier konvexer Teilmengen $A, A' \subset V$ ist stets konvex, aber es gibt konvexe Teilmengen $B, B' \subset V$, deren Vereinigung $B \cup B'$ nicht konvex ist.

Beweis
Nach Definition gilt:A konvex $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : St(x, y) \subset A$. Sei nun $x, y \in A \cap A'$. Dann ist auch $x, y \in A \Rightarrow St(x, y) \subset A$. Weiter ist $x, y \in A' \Rightarrow St(x, y) \subset A'$. Daraus folgt $St(x, y) \subset A \cap A'$.
Der Beweis des zweiten Teils erfolgt durch ein Gegenbeispiel: Seien x, y zwei linear unabhängige Vektoren aus V, $x, y \neq 0$. Durch $B := L(x)$ und $B' := L(y)$ sind zwei konvexe Mengen gegeben. $v := \frac{x+y}{2}$ ist ein Element von $St(x, y)$. Nun ist v nicht in der Vereinigung enthalten: Sei $\frac{x+y}{2} = \lambda x \Rightarrow (\frac{1}{2} - \lambda)x + \frac{1}{2}y = 0$ ergibt sofort einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit. Analog führt der Ansatz $\frac{x+y}{2} = \lambda y$ auf einen Widerspruch. Also ist $St(x, y) \not\subset B \cup B'$. Die Vereinigungsmenge ist nicht konvex.

Aufgabe 9*
Für $k \leq m \leq n$ bestimme man, welche Dimension der Durchschnitt eines k-dimensionalen mit einem m-dimensionalen affinen Teilraum eines n-dimensionalen Vektorraums haben kann.

Lösung
Vorbemerkung: m soll kleiner als n sein, da jeder n-dimensionale affine Teilraum mit dem ganzen Vektorraum zusammenfällt.

- die Dimension des Durchschnitts liegt natürlich im Bereich $-1 \dots k$ (-1 bedeutet, daß der Durchschnitt leer ist)

- sind die affinen Teilräume Unterräume, so kann der Durchschnitt alle Werte von 0 bis k annehmen (man betrachte etwa eine Basis von V und wähle daraus beliebige Teilmengen als Erzeugendensysteme aus).

- -1 und k können für alle k und m auftreten. Der Fall k ist trivial. Um zwei disjunkte affine Teilräume zu konstruieren, wähle man aus einem m-dimensionalen Unterraum M einen Unterraum K aus, dessen Dimension gleich k ist. Dann sind z.B. $\lambda + M$ und $2\lambda + K$ für $\lambda \notin M$ disjunkt (das entsprechende Gleichungssytem wird widersprüchlich).

- Allgemeine Betrachtung. Nach Aufgabe 21, §7, kann jeder affine Teilraum mit einem (inhomogenen) Gleichungssystem beschrieben werden. Im folgenden seien die Gleichungssysteme für beide affinen Teilräume gegeben, wobei angenommen sei, daß sie keine linear abhängigen Gleichungen enthalten. Man betrachte nun das System bestehend aus den Gleichungen für beide affinen Teilräume.

  i) Ist die Anzahl der Gleichungen kleiner als n, z.B. $n - r$, so ist die Lösungsmenge entweder leer oder ein r-dimensionaler affiner Teilraum (falls alle Gleichungen linear unabhängig waren). Da bei der Lösung eventuell linear abhängige Gleichungen elimiert wurden, kann die Lösungsmenge leer sein oder eine Dimension zwischen r und k haben.

  ii) Die Zahl der Gleichungen sei n. Falls Gleichungen linear abhängig sind, kommt i) zum Zug. Andernfalls hat der Durchschnitt die Dimension -1 oder 0 (eindeutig lösbar).

iii) Es sind mehr als n Gleichungen. Das System ist entweder widersprüchlich (Dimension -1) oder es gibt linear abhängige Gleichungen, siehe Fälle i),ii).

- Beispiel: Gegeben seien 2 Ebenen im dreidimensionalen Raum. Sie laßen sich durch je eine Gleichung mit 3 Variablen beschreiben. Die Gesamtzahl der Gleichungen ist $2 < 3$. Der Durchschnitt kann also entweder die Dimension -1 (Fall i), disjunkt), 1 (Fall i), affiner Teilraum mit Dimension 3–2=1) oder 2 (Fall i), abhängige Gleichungen, d.h. identische Ebenen). Insbesondere können zwei Ebenen sich nicht in genau einem Punkt schneiden.

Aufgabe 10*

Ein Punkt p einer konvexen Teilmenge C eines reellen Vektorraums heißt Extremalpunkt von C, wenn es keine Elemente $x \neq y \in C$ mit $p = (1-t)x + ty,\ 0 < t < 1$ gibt. Man gebe ein Beispiel eines Extremalpunktes p einer konvexen Menge C und einer linearen Abbildung $f : V \to W$ an, für die $f(p)$ kein Extremalpunkt von $f(C)$ ist. (Die Konvexität von $f(C) \subset W$ ist einfach zu zeigen, aber nicht Gegenstand der Aufgabe).

Lösung

Sei $V = \mathbf{R}^2$, $C = K((-1,0),(1,0),(0,1))$. C ist ein 2-Simplex (und nach Definition der konvexen Hülle konvex). Nach Aufgabe 11* ist (0,1) ein Extremalpunkt von C. Die lineare Abbildung f sei die Orthogonalprojektion auf $L(1,0)$. Dann gilt $f(C) = K((-1,0),(1,0))$ (ein konvexes 1-Simplex) und $f(0,1) = 0 = \frac{1}{2}(-1,0) + \frac{1}{2}(1,0)$ ist kein Extremalpunkt mehr.

Aufgabe 11*

Man zeige: Ist $K(v_0 \ldots, v_n)$ ein n-Simplex in dem reellen Vektorraum V, so ist $\{v_0, \ldots, v_n\}$ die Menge der Extremalpunkte des Simplex.

Beweis

$S := K(v_0, \ldots, v_n)$ heißt genau dann n-Simplex, wenn $(v_0, \ldots, v_n)$ in allgemeiner Lage ist $\Leftrightarrow$ $(v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0)$ ist linear unabhängig (Notiz auf Seite 149). Obige Familie von Vektoren bildet daher eine Basis des Vektorraums. Da sich jeder Vektor in $S - v_0$ in eindeutiger Weise als Linearkombinationen der Basisvektoren v_i darstellen läßt, ist $\{0, v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ eine Teilmenge der Menge aller Extremalpunkte von $S - v_0$. Da die Vektoren linear unabhängig sind, ist auch 0 ein Extremalpunkt (man beachte die Definition der linearen Unabhängigkeit). Sei nun v ein solcher Extremalpunkt. Dann ist auch $v + v_0 \in S$ ein Extremalpunkt, denn wäre $v + v_0 = (1-t)x + ty$, so wäre $v = (1-t)(x - v_0) + t(y - v_0)$ kein Extremalpunkt von $S - v_0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ eine Teilmenge aller Extremalpunkte des Simplex. Behauptung: Es gibt keine weiteren Extremalpunkte von S. Beweis: Sei $v \in S$, $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$, wobei alle λ_i verschieden von 0 und 1 seien, also $v \neq v_i \forall i$. Definiere:

$$\begin{aligned} x &:= 2\lambda_0 v_0 \\ y &:= 2(v - \lambda_0 v_0) \end{aligned}$$

und wähle $t = \frac{1}{2}$. Dann ist $\frac{x+y}{2} = v$ und es gilt auch $x \neq y$: Mit der Gegenannahme $x = y$ folgt: $x = y = 2\lambda_0 v_0 = 2(v - \lambda_0 v_0) \Rightarrow v = 2\lambda_0 v_0$. Also ist $2\lambda_0 = 1$ und für $i \neq 0$ folgt $\lambda_i = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung, daß kein Koeffizient λ_i verschwindet. Damit kann v kein Extremalpunkt sein. $\Rightarrow \{v_0, \ldots, v_n\}$ ist die Menge aller Extremalpunkte von S.

Aufgabe 23P

Sei V ein zweidimensionaler Vektorraum, (v_1, v_2) eine Basis von V, $\phi : \mathbf{R}^2 \overset{\cong}{\to} V$ der kanonische Basisisomorphismus. Ist $v \in V$ und $\phi^{-1}(v) = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, so nennen wird die x_i die alten Koordinaten von v. Ist nun $\alpha : V \to V$ eine Affinität, so bekommt v durch $(\alpha\phi)^{-1}(v)$ neue Koordinaten.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\alpha"] & & V \\ & \mathbf{R}^2 \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\alpha\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Konkret sei nun folgende Situation gegeben: $V = \mathbf{R}^2$ und $(v_1, v_2) = (e_1, e_2)$ (kanonische Basis). Für jedes $t \in \mathbf{R}$ wird eine Affinität $\alpha_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

definiert. Ein „Teilchen“ fliege nun durch V, d.h. zu jedem („Zeitpunkt“) $t \in \mathbf{R}$ ist ein $v(t) \in V$ gegeben, und zwar seien die „alten Koordinaten“von $v(t)$ gerade $(\cos t + t, \sin t)$. Man bestimme für jeden Zeitpunkt t die „neuen Koordinaten“(bezüglich α_t) für den Punkt $v(t)$.

Lösung

Ist $\alpha_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ die Affinität, welche die neue Basis definiert, so sind die neuen Koordinaten von $v = (x_1, x_2)$:

$$\alpha_t^{-1}(v) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - t \\ x_2 - t \end{pmatrix}$$

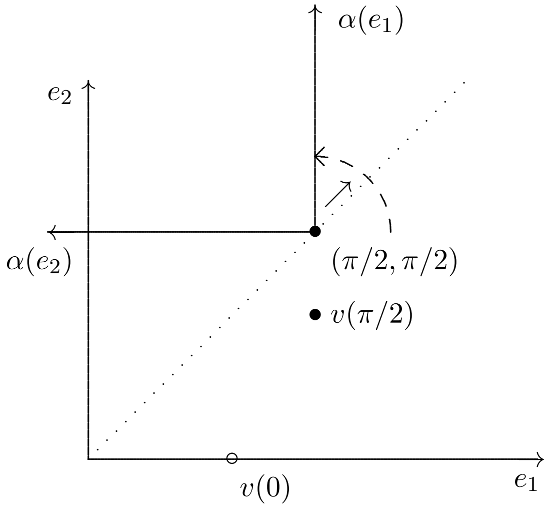
(s. Bemerkung Mitte Seite 159). Mit $v(t) = (\cos t + t, \sin t)$ wird:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t - t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \cos t + \sin t(\sin t - t) \\ -\sin t \cos t + \cos t(\sin t - t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - t \sin t \\ -t \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

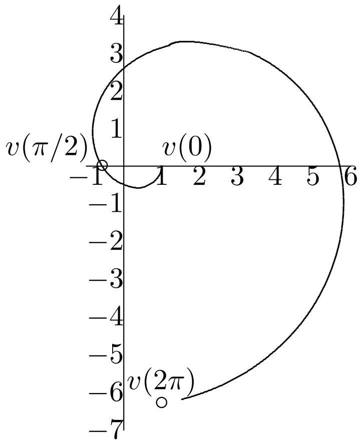
Kontrolle:

1. $v(0) = (1, 0)$. Neue Koordinaten $(y_1, y_2) = (1, 0)$ und es gilt $\alpha_0(y_1, y_2) = (1, 0) = v(0)$
2. $v(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2}, 1)$. Neue Koordinaten $(y_1, y_2) = \alpha_{\frac{\pi}{2}}^{-1} v(\frac{\pi}{2}) = (1 - \frac{\pi}{2}, 0)$ und ebenfalls gilt $\alpha_{\frac{\pi}{2}}(y_1, y_2) = (\frac{\pi}{2}, 1) = v(\frac{\pi}{2})$

Geometrische Interpretation: das neue Koordinatensystem rotiert mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit wie v im Gegenuhrzeigersinn. Gleichzeitig verschiebt es sich entlang der Winkelhalbierenden. Die Bewegung des Teilchens im alten Koordinatensystem ist eine Rotation, überlagert durch eine gleichförmige Bewegung in Richtung e_1.



Wie die nächste Skizze zeigt, ist die Bewegung im neuen System eine Spirale.



9 Euklidische Vektorräume

Aufgabe 25
Man beweise den Satz von Pythagoras: Bilden die drei Punkte a,b,c in einem euklidischen Vektorraum ein rechtwinkliges Dreieck, d.h. $a-c \perp b-c$, dann gilt $||a-c||^2 + ||b-c||^2 = ||a-b||^2$.

Beweis
Mit $<a-c, b-c> = 0 = <a,b> - <a,c> - <b,c> + <c,c>$ gilt:

$$\begin{aligned}
||a-c||^2 + ||b-c||^2 &= <a-c, a-c> + <b-c, b-c> \\
&= <a,a> -2 <a,c> + <c,c> + <b,b> -2 <b,c> + <c,c> \\
&= <a,a> -2 <a,b> + <b,b> \\
&= ||a-b||^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 26
In $\mathbf{R}^3$ werde durch $< x, y > := \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i y_j$ ein Skalarprodukt eingeführt, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Man berechne die Cosinus der Öffnungswinkel zwischen den kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbf{R}^3$.

Lösung
Nach Definition gilt für die Öffnungswinkel zwischen den Vektoren

$$\cos\alpha(\epsilon_i, \epsilon_j) = \frac{<\epsilon_i, \epsilon_j>}{||\epsilon_i|| \cdot ||\epsilon_j||}$$

Mit den folgenden Resultaten

$$\begin{aligned}
||\epsilon_1||^2 &= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} \delta_{1i} \delta_{1j} = a_{11} = 2 \\
||\epsilon_2||^2 &= a_{22} = 2 \\
||\epsilon_3||^2 &= a_{33} = 4 \\
<\epsilon_1, \epsilon_2> &= a_{12} = 1 \\
<\epsilon_1, \epsilon_3> &= a_{13} = 0 \\
<\epsilon_2, \epsilon_3> &= a_{23} = 1
\end{aligned}$$

ergeben sich die Cosinus der Zwischenwinkel zu

$$\cos\alpha(\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{1}{2} \qquad \cos\alpha(\epsilon_1, \epsilon_3) = \frac{0}{\sqrt{2} \cdot 2} = 0 \qquad \cos\alpha(\epsilon_2, \epsilon_3) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

Aufgabe 12*
Für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, werde definiert: $|x| = \max |x_i|$. Man beweise: Es gibt kein Skalarprodukt auf $\mathbf{R}^n$, für das $<x, x> = |x|^2$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$.

Beweis
Das Problem besteht hier darin, einen Ausdruck zu finden, der mit den Regeln des Skalarprodukts zerlegt werden kann, ohne daß dabei gemischte Glieder (d.h. Ausdrücke der Form $< x, y >$, $y \neq x$) auftreten. Zum Beispiel erfüllt jede Norm, die von einem Skalarprodukt herrührt, die sog. Parallelogrammregel:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2$$

Die durch $|x| = \max |x_i|$ definierte Norm rührt nicht von einem Skalarprodukt her, da sie die Parallelogrammregel nicht erfüllt: es sei $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)$ und $y = (0, 1, 0, \ldots, 0)$. Es ergibt sich: $|x|^2 = 1 = |y|^2 = |x+y|^2 = |x-y|^2$ und damit $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2 \neq 2(|x|^2 + |y|^2) = 4$.
Bemerkung: Es gilt auch die Umkehrung der Parallelogrammregel: Eine Norm rührt genau dann von einem Skalarprodukt her, wenn sie die Parallelogrammregel erfüllt (V euklidisch oder unitär).

Aufgabe 13*
Sei V der Vektorraum aller beschränkter reller Zahlenfolgen, das heißt
$V = \{(x_i)_{i=1,2,\ldots} | x_i \in \mathbf{R} \; und \; \exists c \in \mathbf{R} : |x_i| < c \; \forall i\}$. Addition und Skalarmultiplikation seien in der naheliegenden Weise erklärt. Dann ist durch

$$<x, y> = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n^2} \qquad \forall x, y \in V$$

ein Skalarprodukt auf V erklärt. Man finde einen *echten* Untervektorraum $U \subset V$, also $U \neq V$, mit $U^\perp = \{0\}$.

Beweis
Sei $U := L(e_n : n \in \mathbf{N})$ mit $e_n = (0, 0, \ldots, \underbrace{1}_{\text{n−te Stelle}}, 0, \ldots)$.
Dann ist $U^\perp = \{x \in V :< x, e_n >= 0 \; \forall n \in \mathbf{N}\}$. Aus $< x, e_n >= 0 \; \forall n \in \mathbf{N}\}$ ergibt sich $U^\perp = \{(0, \ldots)\}$. Ein $x \in U$ hat nur endlich viele von 0 verschiedene „Koordinaten". Sei $x_0 = (\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbf{N}} \in V$. x_0 ist also kein Element von U und $U \neq V$.

Aufgabe 14*
Sei M eine endliche Menge. Man zeige: Ist $(\mathrm{B_{ij}}(M), \circ)$ abelsch, so hat M weniger als drei Elemente.

Beweis
Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $M = \{0, 1, \ldots, n\}$. Man betrachte die 2 Permutationen aus $\mathrm{B_{ij}}(M)$:

$$f : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & a & \ldots \\ 1 & a & \ldots & 0 & \ldots \end{pmatrix} \qquad\qquad g : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & a & \ldots \\ 1 & 0 & \ldots & a & \ldots \end{pmatrix}$$

Auf nicht bezeichnete Elemente wirke f und g beliebig, zum Beispiel wie die Identität. a sei ein beliebiges Element aus M mit $a \neq 0, 1$. Der Beweis erfolgt durch die Gegenannahme: $(\mathrm{B_{ij}}(M), \circ)$ sei abelsch und M habe mehr als zwei Elemente. Da danach die Zusammensetzung von Permutationen kommutativ ist, folgt:

$$g \circ f(0) = 0 = f \circ g(0) = a \Rightarrow a = 0$$

und ebenso

$$g \circ f(1) = a = f \circ g(1) = 1 \Rightarrow a = 1$$

Beide Ergebnisse stehen im Widerspruch zur Voraussetzung, daß $a \neq 0, 1$ ist. Die Zusammensetzung von Abbildungen kann also für mehr als 2 Elemente nicht kommutativ sein, qed.

Aufgabe 26P

Man bestimme eine orthonormale Basis des Untervektorraums

$$U := L((-3,-3,3,3),(-5,-5,7,7),(4,-2,0,6))$$

von $\mathbf{R}^4$, wobei $\mathbf{R}^4$ mit dem üblichen Skalarprodukt versehen sei.

Lösung

Setze $a_1 := (-1,-1,1,1)$, $a_2 := (2,-1,0,3)$, $a_3 := (-5,-5,7,7)$. Durchführung des Orthonormalisierungsverfahrens: Setze $b_1 := a_1$. Orthogonalisiere zuerst den Vektor a_2:

$$\begin{aligned} b_2' &:= a_2 - \frac{<b_1, a_2>}{<b_1, b_1>} \cdot b_1 = (2,-1,0,3) - \frac{2}{4} \cdot (-1,-1,1,1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (5,-1,-1,5) \end{aligned}$$

Um die weitere Rechnung zu vereinfachen, setze man $b_2 := 2b_2'$.

$$\begin{aligned} b_3' &:= a_3 - \frac{<b_1, a_3>}{<b_1, b_1>} \cdot b_1 - \frac{<b_2, a_3>}{<b_2, b_2>} \cdot b_2 \\ &= (-5,-5,7,7) - \frac{24}{4} \cdot (-1,-1,1,1) - \frac{8}{52} \cdot (5,-1,-1,5) \\ &= (1,1,1,1) - \frac{2}{13} \cdot (5,-1,-1,5) = (\frac{3}{13}, \frac{15}{13}, \frac{15}{13}, \frac{3}{13}) \end{aligned}$$

und setze $b_3 := \frac{13}{3} \cdot b_3' = (1,5,5,1)$. Die Basis (b_1, b_2, b_3) ist nun orthogonal. Durch Normierung der Vektoren erhält man eine orthonormale Basis bestehend aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}(-1,-1,1,1) \qquad \frac{1}{2\sqrt{13}}(5,-1,-1,5), \qquad \frac{1}{2\sqrt{13}}(1,5,5,1)$$

Aufgabe 27P

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Man beweise:

- Sind $\varphi : \mathbf{R} \to V$ und $\psi : \mathbf{R} \to V$ differenzierbare Abbildungen, so ist auch $<\varphi, \psi>: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto <\varphi(t), \psi(t)>$ differenzierbar und es gilt:

$$<\varphi, \psi>^\bullet = <\dot{\varphi}(t), \psi(t)> \; + \; <\varphi(t), \dot{\psi}(t)>$$

- Ist $\varphi : \mathbf{R} \to V$ differenzierbar und $||\varphi(t)|| = const.$ für alle $t \in \mathbf{R}$, so ist $\varphi(t) \perp \dot{\varphi}(t)$ für alle $t \in \mathbf{R}$.

Beweis

- Voraussetzung: Die Stetigkeit des Skalarprodukts sei vorausgesetzt.
  Berechne

$$\lim_{h\to 0} \frac{<\varphi,\psi> (h+t) - <\varphi,\psi> (t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{<\varphi(h+t),\psi(h+t)> - <\varphi(t),\psi(t)>}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[<\varphi(h+t)-\varphi(t),\psi(h+t)-\psi(t)> +$$
$$<\varphi(h+t),\psi(t)> + <\varphi(t),\psi(h+t)> -2 <\varphi(t),\psi(t)>]$$

  Da das Skalarprodukt und φ (und auch ψ) stetig sind, strebt der erste Summand gegen 0. Außerdem gilt (Linearität des Skalarprodukts):

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} <\varphi(h+t),\psi(t)> &= <\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\varphi(h+t),\psi(t)> \\ &= <\dot{\varphi},\psi> \end{aligned}$$

  und ebenso die analoge Beziehung für den zweitletzten Summanden. Schließlich strebt der letzte Summand gegen 0. Also gilt:

$$<\varphi,\psi>^{\bullet} = <\dot{\varphi}(t),\psi(t)> + <\varphi(t),\dot{\psi}(t)>$$

- $||\varphi(t)||$ const $\Rightarrow <\varphi,\varphi>^{\bullet} = 0 = 2 <\dot{\varphi},\varphi> (t)$. Daraus folgt:

$$\varphi(t)\perp\dot{\varphi}(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

  Physikalische Interpretation: ein Massenpunkt bewege sich während der Zeit t. Bleibt der Betrag der Geschwindigkeit („Schnelligkeit") konstant, so ist die Beschleunigung jederzeit senkrecht zur Bewegungsrichtung: $\varphi(t)\perp\dot{\varphi}$. Die Kraft, die auf den Massenpunkt wirkt, verrichtet keine Arbeit (was sich darin äußert, daß der Impuls — proportional zur Schnelligkeit — konstant bleibt).

10 Klassifikation von Matrizen

Aufgabe 28
Man bestimme die Dimension des Untervektorraums $\mathbf{Sym}(n,\mathbf{R})$ von $M(n\times n,\mathbf{R})$.

Lösung
Anschauliche Betrachtung: in einer symmetrischen Matrix sind die Komponenten oberhalb und auf der Hauptdiagonalen frei wählbar. Die Komponenten unterhalb der Hauptdiagonalen sind dann bereits durch die Symmetrie bestimmt. Durch Induktion beweist man, daß damit $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ Komponenten wählbar sind.
Somit ist $\dim \mathbf{Sym}(n,\mathbf{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$

Aufgabe 29
Ein Endomorphismus f eines euklidischen Vektorraumes V heißt anti-selbstadjungiert, wenn $<f(x),y> = - <x,f(y)>$ für alle $x,y\in V$ gilt. Man zeige: Ist f anti-selbstadjungiert und V ungerade dimensional, dann ist f nicht invertierbar. (Man zeige zuerst, daß die Matrix

von f bezüglich einer orthonormalen Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V die Eigenschaft $A = -A^T$, d.h. $a_{ij} = -a_{ji}$ hat. Dann benutze man $\det A = \det A^T$ und die Linearität der Determinante in den Zeilen, um $\det f = 0$ zu zeigen. Die Behauptung folgt dann aus der Notiz 1 in §6, Seite 121).

Beweis
Sei f^* die zu f adjungierte Abbildung. Es gilt $f^* = -f$, da f anti-selbstadjungiert ist. Sei α eine orthonormale Basis von V. Dann gilt mit $A = M(f, \alpha, \alpha)$, $B = M(f^*, \alpha, \alpha)$:

$$B = A^* = A^T = -A$$

(vgl. Seiten 184,185). Aus $\det A = \det A^T$ folgt damit ($-A$ ensteht aus A durch Multiplikation jeder Zeile mit -1):

$$\begin{aligned} \det A &= \det A^T = \det(-A) = (-1)^n \det A \\ &= -\det A \\ \Longrightarrow \det A &= 0 \end{aligned}$$

da n ungerade ist nach Voraussetzung. Also ist A (und damit f) nicht invertierbar.

Aufgabe 30
Sei $P \doteq P_U$ die Orthogonalprojektion eines euklidischen Vektorraums auf einen endlichdimensionalen Untervektorraum U. Man zeige: P ist selbstadjungiert. (Man überlege zuerst, daß $P \circ P = P$ ist und schließe dann aus der Gleichung $x = (Id - P)x + Px$, daß jedes $x \in V$ eine Summe aus einem Element von $U^\perp$ und einem Element von U ist. Damit ist dann der Nachweis von $< Px, y >=< x, Py >$ für alle $x, y \in V$ sehr einfach.)

Beweis
Es gilt sicher $V = U \oplus U^\perp$. (vgl. auch die Bemerkung in der Aufgabe). Für alle $x, y \in V$ gibt es eine (eindeutige) Darstellung in der Form

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 \qquad x_1, y_1 \in U \\ y &= y_1 + y_2 \qquad x_2, y_2 \in U^\perp \end{aligned}$$

Dann ist

$$< Px, y, >=< x_1, y_1 + y_2 >=< x_1, y_1 >$$

denn $P(x_1 + x_2) = Px_1 + Px_2 = x_1$ nach Definition der Orthogonalprojektion. Außerdem gilt $< x_1, y_2 >= 0$ da $y_2 \in U^\perp$ und damit

$$< x_1, y_1 >=< x_1 + x_2, y_1 >=< x, Py_1 + Py_2 >=< x, Py >$$

also ist P selbstadjungiert.

Aufgabe 15*
Man zeige: Ist $f : V \to \mathbf{R}$ ein Homomorphismus eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums nach $\mathbf{R}$, dann gibt es genau ein $x \in V$ mit $< v, x > = f(v)$ für alle $v \in V$.
Bemerkung: dies ist der *Darstellungssatz von Riesz* in seiner einfachsten Form.

Beweis
Existenz von x: Sei $\alpha = (a_1, \ldots, a_n)$ eine orthonormale Basis von V.
Ansatz: $x = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$. Bestimme α_i. Gegeben ist $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mit $\lambda_i = f(a_i)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\lambda_i &= f(a_i) = <a_i, x> = <a_i, \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n> \\ &= \sum_{j=1}^{n} <a_i, a_j> = \alpha_i\end{aligned}$$

Es muß also gelten: $\alpha_i = \lambda_i$. Der damit gefundene Vektor x erfüllt in der Tat die geforderte Bedingung: sei $v \in V$ beliebig, $v = \xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n$. Dann wird

$$f(v) = \xi_1 \cdot f(a_i) + \cdots + \xi_n \cdot f(a_n) = \xi_1 \lambda_1 + \cdots \xi_n \lambda_n$$

und andererseits

$$\begin{aligned}<v, x> &= <\xi_1 a_1 + \cdots + \xi_n a_n, \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n> \\ &= \xi_1 \alpha_1 + \cdots + \xi_n \alpha_n \\ &= \xi_1 \lambda_1 + \cdots + \xi_n \lambda_n\end{aligned}$$

Beweis der Eindeutigkeit: sei $<v, x> = <v, x'>$ für alle $v \in V$. Dann ist $<v, x - x'> = 0$. Setze $v = x - x'$. Damit folgt aus $<x - x', x - x'> = ||x - x'||^2 = 0$ unmittelbar $x - x' = 0$ d.h. $x = x'$.

Aufgabe 16*
Ist f ein Endomorphismus eines n-dimensionalen Vektorraums und gibt es ein $m \in \mathbf{N}$ mit $f^m = f \circ \ldots \circ f = 0$, dann ist auch $f^n = 0$. Bemerkung: f heißt *nilpotent*.

Beweis
Sei f nilpotent. Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n. Induktionsverankerung: $n = 1$. Da f kein Automorphismus und insbesondere nicht surjektiv ist, folgt $f = 0$ weil
$\dim$ Bild f $\leq$ n $- 1 = 0$. Induktionsschritt: Definiere $V_n := V$ und V_{n-1} sei ein beliebiger, $n-1$–dimensionaler Unterraum von V, der Bild f umfaßt, d.h. $f(V_n) \subseteq V_{n-1}$. Ein solches V_{n-1} existiert, da f nicht surjektiv ist. Nun ist $f_{|V_{n-1}} : V_{n-1} \to V_{n-1}$ wiederum ein nilpotenter Operator auf V_{n-1}. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $(f_{|V_{n-1}})^{n-1} = 0$. Mit $f(V_n) \subseteq V_{n-1}$ folgt:

$$f^n = f^{n-1} \circ f = f^{n-1}_{|V_{n-1}} \circ f = 0 \circ f = 0$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 28P
Nach Bemerkung 2 in §8, Seite 150 gibt es zu jeder affinen Abbildung $\alpha : V \to V$ genau eine Translation t_α und einen Endomorphismus f_α mit $\alpha = T_\alpha f_\alpha$. Wir definieren für affine Abbildungen:

$$\alpha \underset{2'}{\sim} \beta \Leftrightarrow \text{Es gibt eine Affinität } \sigma \text{ von } V \text{ mit } \beta = \sigma\alpha\sigma^{-1}.$$

Man zeige: $\alpha \underset{2'}{\sim} \beta \Longrightarrow f_\alpha \underset{2}{\sim} f_\beta$

Beweis
Sei $\alpha = T_a f_\alpha$ und $\beta = T_b f_\beta$. Aus $\alpha \underset{2'}{\sim} \beta$ folgt: $\beta = \sigma\alpha\sigma^{-1} \Rightarrow \beta\sigma = \sigma\alpha$, das heißt

$$\begin{aligned} T_b \circ f_\beta \circ T_s \circ f_\sigma &= T_s \circ f_\sigma \circ T_a \circ f_\alpha \\ T_b \circ T_{f_\beta(s)} \circ f_\beta \circ f_\sigma &= T_s \circ T_{f_\sigma(a)} \circ f_\sigma \circ f_\alpha \\ T_{b+f_\beta(s)} \circ f_\beta f_\sigma &= T_{s+f_\sigma(a)} \circ f_\sigma f_\alpha \end{aligned}$$

Da die Zerlegung in einen Translationsteil und einen affinen Teil eindeutig ist, folgt:

$$f_\beta \circ f_\sigma = f_\sigma \circ f_\alpha \Longleftrightarrow f_\alpha \underset{2}{\sim} f_\beta$$

11 Eigenwerte

Aufgabe 31
Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums V.
Man zeige: $f - Id : V \to V$ ist genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte von 1 verschieden sind. An welcher Stelle des Beweises wird dabei die Endlichkeit der Dimension von V benötigt ?

Beweis
Sei $f - Id$ invertierbar. Dann ist Kern f − Id = $\{0\}$. Es gibt also kein $x \neq 0$ mit $f(x) = x$ sonst wäre $f(x) - Id(x) = x - x = 0 \Rightarrow x \in \{0\}$. Also kann 1 kein Eigenwert sein.
Sei 1 kein Eigenwert: $\forall x \neq 0 \in V : (f - Id)x \neq 0 \Rightarrow$ Kern f − Id = $\{0\}$. Damit ist $f - Id$ injektiv. Ist v endlichdimensional, so ist $f - Id$ auch surjektiv, somit bijektiv und invertierbar.
Gegenbeispiel: Folgenraum, $f : (a_0, a_1, \ldots) \mapsto (0, a_0, a_1, \ldots)$. f ist injektiv, aber nicht surjektiv (und hat keine Eigenwerte).

Aufgabe 32
Ein Untervektorraum U von V heisst invariant gegenüber einem Endomorphismus, wenn $f(U) \subset U$. Man zeige: Die Eigenräume von $f^n = f \circ \ldots \circ f$ sind invariant gegenüber f.

Beweis
Seien E_λ Eigenräume von f^n. Zu zeigen ist: $f(E_\lambda) \subset E_\lambda$. Sei $x \in E_\lambda$ beliebig. Es ist $f^n(x) = \lambda x$. Damit gilt $f^{n+1}(x) = f \circ f^n(x) = f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x) = f^n \circ f(x)$ da die Verkettung von Abbildungen assoziativ ist. $\Rightarrow f(x) \in E_\lambda$ qed.

Aufgabe 33
Sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum. Man bestimme die Eigenwerte der Orthogonalprojektion $P_U : V \to U$.

Beweis
Nach Satz und Definition auf Seite 165 folgt: U ist Eigenraum zum Eigenwert 1 und $U^\perp$ Eigenraum zu 0. Hierbei wurde benutzt, daß $V = U \oplus U^\perp$ ist. Die Endlichkeit der Dimension von U ist dabei wesentlich. Aus der Zerlegung eines Vektors $x \in V$ in $x = u + o$ mit $u \in U$ und $o \in U^\perp$ folgt unmittelbar, daß P keine weiteren Eigenwerte hat (denn $Px = u$ und Px ist kein Vielfaches von x falls u und o von Null verschieden sind; man beachte die Eindeutigkeit der Zerlegung von x und der Vielfachen davon).

Aufgabe 17*

Da die Endomorphismen $V \to V$ eine Algebra bilden, ergibt es einen Sinn, ein durch

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \qquad a_i \in K$$

definiertes Polynom P auf einen Endomorphismus f anzuwenden:

$$P(f) = a_0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n : V \to V$$

Man zeige: ist λ ein Eigenwert von f, dann ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(f)$.

Beweis

Sei λ ein Eigenwert mit Eigenvektor x. Es ist

$$P(\lambda) \cdot x = a_0 \cdot x + a_1 \lambda \cdot x + \cdots + a_n \lambda^n \cdot x$$

Mit $f^i(x) = \lambda^i \cdot x \; \forall i$ folgt:

$$P(f)(x) = a_0 \mathrm{Id}(x) + a_1 f(x) + \cdots + a_n f^n(x) = a_0 x + a_1 \lambda x + \cdots + a_n \lambda^n x$$

und also $P(f)(x) = P(\lambda) \cdot x$. Das heisst, x ist ein Eigenvektor von $P(f)$ zum Eigenwert $P(\lambda)$.

Aufgabe 18*

Sei $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine bijektive Abbildung („Permutation"). Sei $f_\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ durch $f_\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)})$ definiert. Man bestimme sämtliche Eigenwerte von f_π.

Lösung

Man betrachte die endliche Menge $X = \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, wobei $| - |$ eine Norm in $\mathbf{R}^n$ sei. Dann gibt es sicher ein maximales Element von X, d.h. es gibt ein x_{max} mit

$$|x_{max}| \geq |x_i| \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ebenso gibt es ein minimales Element x_{min} mit

$$|x_{min}| \leq |x_i| \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Sei nun λ ein Eigenwert von f_π. Da π eine Permutation ist, folgt:

$$\begin{aligned} |x_{\pi(max)}| &\leq |x_{max}| \\ |x_{\pi(min)}| &\geq |x_{min}| \end{aligned}$$

Damit folgt aus

$$\begin{aligned} |x_{\pi(max)}| &= |\lambda x_{max}| = |\lambda| \cdot |x_{max}| \\ |x_{\pi(min)}| &= |\lambda x_{min}| = |\lambda| \cdot |x_{min}| \end{aligned}$$

dass $|\lambda| \leq 1$ und $|\lambda| \geq 1$. Eigenwerte können also nur 1 und -1 sein. Daß der Eigenwert 1 auftritt, ist trivial. Zu $\lambda = -1$ ein Beispiel:
Sei $n = 4$, $x = (1, 1, -1, -1)$, $\pi = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $f_\pi(x) = (-1, -1, 1, 1) = -x$.

Aufgabe 31P

Man bestimme die Eigenwerte und Eigenräume von $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

Lösung

Die Abbildung ist ein Element von $O(2) \setminus SO(2)$, vgl. Seite 102. Sie stellt geometrisch eine Spiegelung an der mit $\varphi/2$ zur e_1-Achse geneigten Gerade dar. Eigenwerte sind deshalb 1 und -1 mit den Eigenräumen:

$$\begin{aligned} E_1 &= \{t(\cos\varphi/2, \sin\varphi/2 : t \in \mathbf{R})\} \\ E_{-1} &= \{t(-\sin\varphi/2, \cos\varphi/2 : t \in \mathbf{R})\} \end{aligned}$$

Explizite Ausrechnung ergibt:

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = -(\cos\varphi - \lambda)(\cos\varphi + \lambda) - \sin^2\varphi \\ &= \lambda^2 - 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda = \pm 1$. Da zwei verschiedene Eigenwerte existieren, ist $\mathbf{R^2}$ die (direkte) Summe zweier eindimensionaler Eigenräume. Man überzeugt sich leicht durch Einsetzen, dass $(\cos\varphi/2, \sin\varphi/2)$ und $(-\sin\varphi/2, \cos\varphi/2)$ Eigenvektoren zu den Eigenwerten ± 1 sind.