Physikpraktikum
Komplexer Wechselstromwiderstand

Andreas Bieri
Klasse Re 1a
Gymnasium Neufeld, Bern

Praktikumsbericht Physik März 1989

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Für die Durchführung des Praktikums und die Erarbeitung der benötigten Theorie standen mir — wie jedem andern Schüler — 10 Lektionen zur Verfügung. Vier Lektionen wendete ich für die Theorie auf (das Studium außerhalb der Schulzeit nicht einberechnet). Vier weitere Lektionen brauchte für die Meßung. In den zwei letzten Stunden überprüfte ich die Meßungen und nahm dabei drei Korrekturen vor. Die Fehler beruhten alle auf Ablesefehlern: die Werte waren um eine Einheit auf dem Oszilloskop zu groß.

Als theoretische Unterlagen benützte ich neben den im Literaturverzeichnis aufgeführten Publikationen — auch weiterführende Literatur habe ich aufgelistet — die Skripte "Elektrodynamik" und "Elektromagnetismus". Andere Literatur, insbesondere Praktikumsberichte von ehemaligen Schülern, verwendete ich nicht.

Den Bericht schrieb ich auf einem MSDOS – Computer mit dem Programm LATEX.

1 Sinusförmige Ströme

1.1 Einleitung

Das Verhalten von Kapazitäten und Induktivitäten in einem Stromkreis hängt im Gegensatz zum rein ohmschen Widerstand in entscheidendem Maße von der Art der angelegten Spannung ab. Neben ihrer Frequenz — sofern es sich um eine periodische Spannungsfunktion handelt — ist die Spannung als Funktion der Zeit zur Berechnung des Verhaltens der elektrischen Schaltung wichtig. Im Hinblick auf die Herleitung des komplexen Wechselstromwiderstandes im nächsten Kapitel sollen hier einige Grundbegriffe aus der Lehre der Wechselströme eingeführt werden, obwohl diese Begriffe für die Durchführung des Praktikums nicht benötigt werden.

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Spannungen und Ströme beliebiger Form. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man sich auf sinusförmige Ströme beschränken. Dies folgt aus dem Satz von **Fourier**, der besagt, dass sich jede über eine Periode T periodische Funktion als Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen lässt. Die Kosinusfunktion lässt sich auf eine Sinusfunktion zurückführen, womit es genügt, nur sinusförmige Ströme zu untersuchen.

1.2 Effektivwert

Unter dem Effektivwert einer Wechselspannung verteht man diejenige zeitlich konstante Spannung, die, an dem betrachteten Netzwerk angelegt, die gleiche elektrische Leistung hervorrufen würde.

Es gilt: $P = UI$ und $P = \frac{U^2}{R}$. Ansatz: $U = u(t)$ und $I = i(t)$. Für die Leistung in einem beliebigen Zeitpunkt gilt:

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{u^2(t)}{R}$$

Durch Integration nach der Zeit über die Periodendauer T ergibt sich, da $W = PI$ ist:

$$W = \frac{1}{R}\int_0^T u^2(t)\,dt$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Periodendauer T, so erhält man die mittlere Leistung während T:

$$\bar{P} = \frac{1}{R}\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt$$

Man definiert: $\bar{P} = \frac{U_{eff}^2}{R}$

Es gilt für den Effektivwert der Spannung: $$\boxed{U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}}$$

Den Effektivwert des Stromes erhält man in analoger Weise.

Für die Effektivwerte von Strom und Spannung bei einem harmonischen (sinusförmigen) Wechselstrom erhält man:

$$U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

und

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Die Stromarbeit eines Wechselstroms in einem Stromkreis, in dem zwischen Strom und Spannung keine Phasenverschiebung besteht, ist:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^t I_0 \sin \omega t \cdot U_0 \sin \omega t \cdot dt \\ &= I_0 \cdot U_0 \cdot t \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \sin^2 \omega t dt \\ &= \frac{1}{2} I_0 \cdot U_0 \cdot t \end{aligned}$$

oder $$\boxed{A = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot t}$$

1.3 Mittelwert

Als Mittelwert einer Größe y bezeichnet man den durchschnittlichen Wert, den diese Größe während der Periode T annimmt. Ansatz: $T = n\Delta t$ und somit:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta t_1 \cdot y_1 + \Delta t_2 \cdot y_2 + \Delta t_3 \cdot y_3 + \cdots + \Delta t_n \cdot y_n}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \cdots + \Delta t_n}$$

Umformung und Übergang zu infinitesimal kleinen Intervallen ergibt:

$$\boxed{\bar{y} = \frac{1}{T} \int_0^T y(t)\, dt}$$

1.4 Leistung

Es gilt die folgende Beziehung (s. Effektivwert):

$$A = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot t$$

Durch Division mit der Zeit t ergibt sich nun für die Leistung:

$$P = I_{eff} \cdot U_{eff}$$

Berücksichtigt man die Phasenverschiebung, so folgt aus dem Ansatz $I = I_0 \cos(\omega t - \alpha)$ die während der Zeit t verrichtete Arbeit:

$$A = \int_0^t U \cdot I \cdot dt = U_0 \cdot I_0 \int_0^t \cos\omega t \cdot \cos(\omega t - \alpha) \cdot dt$$

$$A = I_0 \cdot U_0 \left[\frac{\cos\alpha}{\omega} \int_0^{\omega t} \cos^2 \omega t \cdot d(\omega t) + \frac{\sin\alpha}{\omega} \int_0^{\omega t} \cos\omega t \cdot \sin\omega t \cdot d(\omega t) \right]$$

Die mittlere Leistung wird bei großem t:

$$\bar{P} = \frac{A}{t} = \frac{1}{2} I_0 \cdot U_0 \cdot \cos\alpha = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot \cos\alpha$$

$$\boxed{P = I_{eff} \cdot U_{eff} \cdot \cos\alpha}$$

Ist $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so wird die Leistung Null; ist $\alpha = 0$, so gilt für die Leistung $P = I_{eff} \cdot U_{eff}$. In diesem Fall fällt die gesamte Leistung am ohmschen Widerstand ab.

Diese Leistung wird auch als *Wirkleistung* bezeichnet, da sie allein Arbeit verrichtet. Ist die Phasenverschiebung nicht Null, so setzt sich die *Schein*leistung $P = U \cdot I$ aus zwei Anteilen zusammen, aus *Blind- und Wirkleistung*. Die *Blindleistung* verrichtet keine Arbeit. Zusammen mit der Wirkleistung bildet sie die *Scheinleistung*.

2 Theoretische Herleitung der Impedanz

2.1 Einleitung

Wenn man die **Kirchhoff**schen Sätze auf ein Netzwerk mit Kondensatoren und Spulen anwendet, erhält man eine Integral-/Differentialgleichung. Die Lösungen dieser Gleichungen bestehen aus einem stationären Anteil und dem Einschwingvorgang. Für das Praktikum müßen die Einschwingvorgänge nicht behandelt werden; nur das stationäre Verhalten des Netzwerkes soll untersucht werden. Das Verhalten wird durch den *Wechselstromwiderstand* und den *Phasenwinkel* beschrieben. Als Wechselstromwiderstand Z definiert man:

$$\boxed{Z = \frac{U_0}{I_0}}$$

Mit U_0 und I_0 sollen die Amplituden von Spannung und Strom bezeichnet werden. Die *Phasenverschiebung* φ wird definiert als die Phasenverschiebung des Stromes gegenüber der angelegten Spannung. Eine positive Phasenverschiebung bedeutet, daß der Strom der Spannung *nachläuft*.

Der Betrag des Wechselstromwiderstandes und die Phasenverschiebung sollen zunächst ohne Zuhilfenahme komplexer Zahlen beschrieben werden.

2.2 Die Impedanz bei idealen Komponenten

2.2.1 Die Impedanz des Kondensators

An einem Kondensator liege eine sinusförmige Spannung

$$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$$

Gesucht ist der Stromverlauf.

Es gilt: $Q = CU$, also $\dot{Q} = I = C\dot{U} = CU_0\omega \cos \omega t$

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0 \cdot \cos \omega t \\ I_0 &= \omega C U_0 \end{aligned}$$

Mit der Definition von Z erhält man für den Kondensator:

$$\boxed{Z_c = \frac{1}{\omega C}}$$

Zwischen Spannung und Strom tritt eine Phasenverschiebung von $-\pi/2$ auf. Der Strom läuft der Spannung voraus.

2.2.2 Die Impedanz einer Spule

In analoger Weise läßt sich der Betrag der Impedanz (Wechselstromwiderstand) bestimmen: an der Spule liege die Spannung

$$U(t) = U_0 \cdot \sin \omega t$$

Für die Spule gilt das Selbstinduktionsgesetz(s. Skript Elektromagnetismus S. 20):

$$U(A, B) = L \cdot \frac{dI_{A \to B}}{dt}$$

Damit erhält man:

$$U = U_0 \cdot \sin \omega t = L\dot{I} \qquad \dot{I} = \frac{U_0}{L} \sin \omega t \qquad I(t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t + K$$

Die Integrationskonstante K verschwindet, da bei $U_0 = 0$ auch $I(t)$ verschwindet. Somit gilt:

$$I(t) = -\frac{U_0}{\omega L} \cos \omega t$$

und

$$\boxed{Z = \omega L}$$

Die Phasenvershiebung beträgt $\pi/2$, der Strom läuft der Spannung nach.

2.3 Die Impedanz als komplexe Größe

2.3.1 Die Impedanz bei Spule und Widerstand

An der untenstehenden Schaltung liege die Spannung $u(t) = U_0 e^{j\omega t}$.

$u(t)$ läßt sich mach der Eulerschen Formel anders schreiben:

$$u(t) = U_0 e^{j\omega t} = U_0 \cos \omega t + jU_0 \sin \omega t$$

Mit dem Maschensatz folgt (s. Skript Elektromagnetismus S. 20):

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = U_0 e^{j\omega t}$$

Diese lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat eine Lösung der Form $i(t) = Ke^{j\omega t}$. Setzt man diese Stromfunktion in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$RKe^{j\omega t} + j\omega LKe^{j\omega t} = U_0 e^{j\omega t}$$

daraus folgt $K = \frac{U_0}{R+j\omega L}$ und $i(t) = \frac{U_0}{R+j\omega L}e^{j\omega t}$
Der Quotient aus Spannungsfunktion und Stromfunktion zeigt, daß die Impedanz eine *komplexe Zahl mit dem Realteil R und dem Imaginärteil* ωL *ist:*

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{u(t)}{i(t)} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{\frac{U_0}{R+j\omega L}e^{j\omega t}} = R + j\omega L}$$

Die Phasenverschiebung ergibt sich aus der komplexen Darstellung der Stromfunktion zu:

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R}$$

2.3.2 Die Impedanz bei Kondensator und Widerstand

An einer Serieschaltung eines Kondensators und eines Widerstandes liege die Spannung $U_0 e^{j\omega t}$.

Es gilt (s. Skript Elektrodynamik S. 47):

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = U_0 e^{j\omega t}$$

Es ist $i(t) = Ke^{j\omega t}$; Einsetzen in die obige Gleichung ergibt:

$$RKe^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega t}Ke^{j\omega t} = U_0 e^{j\omega t}$$

Daraus folgt:

$$K = \frac{U_0}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U_0}{R - j\frac{1}{\omega C}}$$

und

$$i(t) = \frac{U_0}{R - j\frac{1}{\omega C}} e^{j\omega t}$$

Dann wird:

$$\boxed{\mathbf{Z} = R - j\frac{1}{\omega C}}$$

Die Impedanz ist wieder eine komplexe Zahl mit dem Realteil R und dem Imaginärteil $-j\frac{1}{\omega C}$.
Für die Phasenverschiebung folgt:

$$\tan\varphi = \frac{1}{\omega C}$$

2.3.3 Die komplexe Darstellung des Ohmschen Gesetzes

Man betrachte die allgemeine Spannungsfunktion $u = U_0 e^{j(\omega t+\alpha)}$, wobei α die Phasenverschiebung zum Zeitpunkt $t = 0$ darstellt. Diese Spannung wird an ein Netzwerk mit der (komplexen) Impedanz $\mathbf{Z}$ gelegt (s. obige Ausführungen). Die Impedanz läßt sich schreiben als:

$$Ze^{j\theta} \qquad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$$

Der Strom ist dann gegeben durch

$$I(t) = \frac{U_0}{Z} e^{j(\omega t+\alpha-\theta)} = I_0 e^{j(\omega t+\alpha-\theta)}$$

oder

$$I_0 e^{j(\omega t+\alpha-\theta)} = \frac{U_0 e^{j(\omega t+\alpha)}}{Ze^{j\theta}}$$

In dieser Gleichung tritt die Zeit explizit auf. Durch Multiplikation der Gleichung mit $e^{-j\omega t}$ wird sie elimiert:

$$\begin{aligned} e^{-j\omega t}(I_0 e^{j(\omega t+\alpha-\theta)}) &= e^{-j\omega t}\left(\frac{U_0 e^{j(\omega t+\alpha)}}{Ze^{j\theta}}\right) \\ I_0 e^{j(\alpha-\theta)} &= U_0 \frac{e^{j\alpha}}{Ze^{j\theta}} \end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ erhält man die Effektivwerte von Strom und Spannung. Die Phasenlage der Spannung bzw. des Stromes wird durch $U\angle\alpha$ kenntlich gemacht. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}\frac{I_0}{\sqrt{2}}e^{j(\alpha-\theta)} &= \frac{U_0}{\sqrt{2}}\cdot\frac{e^{j\alpha}}{Ze^{j\theta}}\\ I\angle\alpha-\theta &= \frac{U_0\angle\alpha}{Z\angle\theta}\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{I}=\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{Z}}}$$

Die Größen in dieser Gleichung sind komplex. Sie ist eine Vektordarstellung des Ohmschen Gesetzes und wird als *komplexe Darstellung des Ohmschen Gesetzes* bezeichnet.

3 Experimentelle Messung

3.1 Zielsetzung

Bei diesem Praktikum wird die Aufgabe gestellt, die Ortskurve des komplexen Wechselstromwiderstandes für verschiedene elektrische Netze zu bestimmen. Unter Ortskurve ist dabei ein Diagramm zu verstehn, das die Abhängigkeit des Wechselstromwiderstandes von der angelegten Frequenz zeigt. Derartige Diagramme sind für einfache Stromkreise mit folgenden elektrischen Elementen zu bestimmen:

a) eine Spule
b) einen Kondensator
c) eine Serieschaltung Spule–Kondensator–Widerstand

Vorgeschlagen wird in der Anleitung, zu diesem Zwecke den Betrag der Impedanz und die Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom für verschiedene Frequenzen zu bestimmen.

3.2 Der Versuchsaufbau

Um den Wechselstromwiderstand bestimmen zu können, muss an die Schaltung eine Spannung bekannter Größe und Frequenz angelegt werden. Damit die Ortskurve des Wechselstromwiderstandes aufgezeichnet werden kann, muss die Frequenz variabel sein. Ein *Frequenzgenerator* mit einstellbarer Frequenz ist deshalb unerläßlich. Zur Untersuchung der Phasenverschiebung bietet sich ein *Oszilloskop* an. Dieses Gerät, das die an den Eingängen anliegende Spannung periodisch auf einen Leuchtschirm abbildet, so daß sich ein stillstehender Wellenzug ergibt, ermöglicht neben der Spannungsmessung auch die Bestimmung der Phasenverschiebung. Die Spannungsmeßung ist sehr einfach: Auf dem Bildschirm ist ein geeichtes Netz aufgprägt. Eine vertikale Strecke vom 1 cm Länge auf diesem Netz entspricht derjenigen Spannung, die am Gerät mit dem Schalter “volts/division” eingestellt werden kann. Analog dazu entspricht eine horizontale

Strecke von 1 cm der Zeit, die mit "time/division" (manchmal auch "time base" genannt) am Gerät eingestellt werden kann. (s. unten).
Für den Versuch habe ich folgende Geräte verwendet:

1. Frequenzgenerator TelEquipment AG203; Ausgangswiderstand 600Ω; Frequenzgenauigkeit ±(3% + 1) Hz
2. 10MHz – Oszilloskop TelEquipment D61; Eingangsimpedanz 1MΩ/35pF; Genauigkeit vertikal ±5%, horizontal ±5% in den benützten Bereichen
3. Widerstandsdekade mit Genauigkeit 1%
4. Luftspule mit 200 Windungen, $R_i = 2.5\Omega$ (s. Abbildung)
5. Kondensator mit $C = 2\mu$F (s. Abbildung)

Den Versuchsaufbau, wie er zur Meßung benützt wurde:

Die Meßschaltung besteht aus einem unverzweigten Stromkreis mit einer Wechselstromquelle (Frequenzgenerator), einem Widerstand und dem zu messenden Element in Serie. Der Widerstand ist notwendig, weil eine reine Kapazität den Generator zu stark belasten würde (der Widerstand sollte gleich groß sein wie die Ausgangsimpedanz des Genrators von 600 Ω)

Zur Veranschaulichung ein Schaltschema:

Zwischen den Punkten A und B wird der Kondensator oder die Spule angeschlossen. Die Spannung, die der Fequenzgenerator liefert, wird auf den ersten Kanal des Oszilloskops geführt. Die Spannung, die über den Widerstand abfällt, wird auf dem zweiten Kanal sichtbar gemacht.
Als letzte Vorarbeit vor der Meßung habe ich die Schalter auf der Frontseite des Oszilloskops bei den Eingängen auf die Stellung AC und die Triggerung auf Auto gestellt. Der Zeitpunkt des Strahldurchlaufs wird vom Gerät nun so gewählt, daß sich ein stillstehendes Bild ergibt.

3.3 Die Durchführung der Messung

Bei der Meßung bin ich immer gleich vorgegangen:
Nach dem Einschalten der Geräte stellte ich auf der Widerstandsdekade 100 Ω ein, schloß das zu meßende Element an und wählte eine Frequenz. Am Oszilloskop stellte ich die Zeitkonstante so ein, daß etwa eine Schwingung sichtbar war. Die Empfindlichkeit des ersten Kanals stellte ich meist auf 0.5V ein. Dann regelte ich die Ausgangsspannung des Generators so ein, daß die Schwingung den Rand des Gitternetzes auf dem Schirms oben und unten berührte. Die Spannung betrug also 4V. Zum Ablesen der Spannung am zweiten Kanal wählte ich die Empfindlickeit so, daß die ganze Schwingung sichtbar war. Durch vertikales Verschieben (Regler "position") ließ sich die Spannung von Spitze zu Spitze leicht ablesen.
Um die Phasenverschiebung zu bestimmen, verkleinerte ich die Zeitkonstante damit die Ablesung der Differenz der Nulldurchgänge möglichst genau wurde. Dabei mußten die Schwingungen genau symmetrisch zur Nullinie auf dem Schirm sein; ich erreichte dies, indem ich den zweiten Kanal abschaltete und den horizontalen, leuchtenden Strich genau auf die Nullinie verschob und wieder einschaltete. Ein Problem dabei war, daß das Osziloskop schlecht justiert war: die Nullinie war nicht parallel zur Gravierung auf dem Schirm. Zudem war die Fokussierung des Strahles mangelhaft, was eine genauere Ablesung oft unmöglich machte.
Nach diesem Schema führte ich alle drei Meßserien durch.

3.4 Die Messresultate

Die untenstehenden Tabellen zeigen die Resultate der Meßserien. In der ersten Spalte ist jeweils die an die Meßschaltung angelegte Spannung aufgetragen; diese Spannung habe ich in den meisten Fällen auf 4V eingestellt. In die zweiten Spalte habe ich die Spannung, die ich über dem Ohmschen Widerstand gemessen habe, eingetragen. In die dritte und fünfte Spalte habe ich die Einstellungen am Frequenzgenerator (Frequenz) und am Oszilloskop (Zeitbasis) aufgenommen.
Die vierte Spalte zeigt die gemessene Phasenverschiebung. Damit ich die Messung nicht für Zwischenberechnungen unterbrechen mußte, habe ich hier nur die Verschiebung der Wellenzüge in Skaleneinheiten [Div] des Oszilloskops gemessen. Die Phasenverschiebung in Radiant in der sechsten Spalte läßt sich wie folgt berechnen:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T} = 2\pi \cdot \Delta t f$$

wenn mit Δt die Zeitdifferenz der beiden Nulldurchgänge der Schwingungen bezeichnet wird. Diese ist gleich der Zeitdifferenz in Skaleneinheiten multipliziert mit dem Wert einer Skaleneinheit in Sekunden. Die Phasenverschiebung kann positiv (Spule) oder negativ (Kondensator) sein.

3.4.1 Serieschaltung Widerstand –Kondensator

Bei der Meßung des Impedanzverlaufs für eine Serieschaltung Kondensator – Widerstand wurden die Komponenten wie folgt gewählt:

Kondensator: Kapazität C = 2μF Widerstand: R = 100 Ω

U_{ss} CH1 [V]	U_{ss} CH2 [V]	f [Hz]	φ [Div]	[Div]	φ [rad]
4.0	0.28	50	-5.1	2ms	-1.57
4.0	0.58	100	-4.6	1ms	-1.45
4.0	1.08	200	-5.4	200μs	-1.38
4.0	1.56	300	-3.2	200μs	-1.21
4.0	2.30	500	-3.0	100μs	-0.94
4.0	2.80	700	-1.6	100μs	-0.70
4.0	3.10	800	-1.4	100μs	-0.70
4.0	3.30	1000	-1.1	100μs	-0.69
4.0	3.60	1500	-0.9	50μs	-0.42
4.0	3.75	2000	-1.3	20μs	-0.33
4.0	3.85	3000	-0.7	20μs	-0.26

Tabelle 1: Serieschaltung Widerst. – Kond.

3.4.2 Serieschaltung Widerstand – Spule

Für die Meßung des Impedanzverlaufs für eine Serieschaltung Spule–Widerstand benützte ich Komponenten mit folgenden Daten:

Spule: 200 Windungen; Induktivität unbekannt
Widerstand: R = 100 Ω

Die Spule hat einen Ohmschen Innenwiderstand von 2.5Ω, der bei der Berechnung des Wechselstromwiderstandes berüksichtigt werden muß (s. nächster Abschnitt). Aus den Meßdaten läßt sich die Induktivität der Spule bestimmen.

U_{ss} CH1 [V]	U_{ss} CH2 [V]	f [kHz]	φ [Div]	[Div]	φ [rad]
4.0	3.30	1.0	0.6	100μs	0.38
4.0	2.90	1.5	0.8	100μs	0.75
8.0	3.75	3.0	1.2	50μs	1.13
8.0	2.45	5.0	2.3	20μs	1.38
8.0	2.00	6.0	1.9	20μs	1.43
8.0	1.50	8.0	1.5	20μs	1.51
8.0	1.20	10	1.3	20μs	1.63
8.0	0.56	20	2.6	5μs	1.63
8.0	0.36	30	1.7	5μs	1.60
8.0	0.32	40	3.2	2μs	1.61
8.0	0.24	50	2.4	2μs	1.51
8.0	0.20	60	2.1	2μs	1.58
8.0	0.12	80	3.0	1μs	1.51
8.0	0.09	100	2.4	1μs	1.51

Tabelle 2: Serieschaltung Widerst. – Spule

3.4.3 Serieschaltung von R,L,C

Die untenstehende Tabelle zeigt die Meßresultate für die Serieschaltung von allen drei Elementen.

Kondensator: C = 2μF

Spule: 200 Windungen; R_i = 2.5 Ω; Induktivität unbekannt

Widerstand: R = 100 Ω

U_{ss} CH1 [V]	U_{ss} CH2 [V]	f [kHz]	φ [Div]	[Div]	φ [rad]
4.0	0.29	0.05	-2.6	2 ms	-1.63
4.0	0.57	0.1	-4.5	500μs	-1.41
4.0	1.12	0.2	-2.2	500μs	-1.38
4.0	1.68	0.3	-3.2	200μs	-1.21
4.0	2.65	0.5	-2.7	100μs	-0.85
4.0	3.40	0.7	-2.4	50μs	-0.53
4.0	3.70	0.8	-1.4	50μs	-0.35
4.0	3.90	1.0	-0.8	20μs	-0.10
4.0	3.65	1.5	0.9	50μs	0.42
4.0	3.05	2.0	2.8	20μs	0.70
4.0	2.25	3.0	2.7	20μs	1.02
4.0	1.36	5.0	2.1	20μs	1.32
4.0	0.68	10	2.3	10μs	1.45
4.0	0.46	15	1.6	5μs	1.51
4.0	0.34	20	2.5	5μs	1.57
4.0	0.22	30	4.0	2μs	1.51
4.0	0.16	40	3.0	2μs	1.51
4.0	0.13	50	2.5	2μs	1.57
4.0	0.06	80	3.1	1μs	1.56

Tabelle 3: Serieschaltung von R,L,C

3.5 Auswertung

Ziel des Praktikums ist, Ortskurven zu bestimmen. Der Phasenwinkel ist bereits aus der Messung bekannt; er erlaubt es, den Betrag der Impedanz für die Spule und den Kondensator einfach zu bestimmen. Das Zeigerdiagramm sieht in etwa so aus:

Es gilt:

$$\tan\varphi = \frac{\hat{U}_C}{\hat{U}_R} = \frac{IZ_C}{IR} = \frac{Z_C}{R}$$

Daraus folgt:

$$Z_C = R \cdot \tan\varphi$$

oder mit den gemeßenen Spannungen:

$$\tan\varphi = \frac{\hat{U}_C}{U_R} = \frac{\sqrt{U_{tot}^2 - U_R^2}}{U_R}$$

oben eingesetzt:

$$Z_C = R \cdot \frac{\sqrt{U_{tot}^2 - U_R^2}}{U_R}$$

Für die Ortskurve verwendete ich die Beziehung mit den Spannungen, da die Berechnung mit dem Tangens zu ungenau wird (vor allem nahe bei $\frac{\pi}{2}$).
Bei der Bestimmung der Impedanz der Spule mußte ihr Ohmscher Innenwiderstand von 2.5Ω zum Widerstand von 100Ω addiert werden.
Die Induktivität der Spule bestimmte ich mit der Beziehung

$$L = \frac{Z}{\omega}$$

aus der zweiten Meßserie (s. Grafik).
Die dritte Meßung soll nicht die Impedanz eines Elementes allein zeigen, sondern die des Netzwerkes. Hier erkennt man den großen Nutzen der komplexen Darstellung: *Impedanzen können addiert werden.* Es gilt:

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

oder auch:

$$Z = R \cdot \cos\varphi$$

Aus Gründen der Genauigkeit bestimmte ich zuerst den imagiären Anteil von Z aus den Spannungen (s. oben) und bestimmte dann den Betrag von Z durch "geometrische Addition" von R.
Die Graphen sind dem Bericht auf getrennten Blättern beigefügt.

3.6 Fehlerbetrachtung

Die Fehler der Meßwerte rühren von den Ungenauigkeiten der Geräte und der Ablesung her.
Die Phasenverscheibung φ wurde wie folgt berechnet:

$$\varphi = 2\pi \cdot \frac{\Delta t}{T} = 2\pi f \cdot \Delta t$$

Der relative Fehler von φ ist demnach:

$$\tilde{\varphi} = \tilde{f} + \tilde{\Delta t}$$

Mit der Ungenauigkeit der Geräte ergibt sich für $\tilde{f}$ 5% und $\tilde{\Delta t}$ 5%. Den Ablesefehler schätze ich auf 2%; bei etwa 5 cm Differenz auf dem Schirm etwa 1mm Genauigkeit.
Der rel. Fehler von φ muß mit 10 – 12% angenommen werden.
Die Impedanz wurde mit folgender Beziehung berechnet:

$$Z_c = R \cdot \frac{\sqrt{U_{tot}^2 - U_R^2}}{U_R}$$

Um den Fehler mit den Regeln der Fehlerfortpflanzung abschätzen zu können, sei angenommen, daß die Fehler der Spannungen etwa gleich seien. Der Ablesefehler ist etwa 2%, der des Oszilloskops 5%; damit ergibt sich für den Wurzelausdruck ein rel. Fehler von 7%. Hinzu kommt der Fehler des Widerstandes von 1% und der Spannung von 2+5% = 7%.
Die Obergenze des rel. Fehler liegt also bei 14%.
Bei der dritten Meßung rduziert sich der Fehler durch die Bildung des Betrages von Z auf etwa 8%.

3.7 Spezielle Beobachtungen

Während der Meßung fiel mir zunächst auf, daß sich die Ausgangsspannung des Frequenzgenerators veränderte, die stabil bleiben sollte. Der Grund stellte sich nach der Meßung heraus: Die Ausgangsimpedanz des Generators beträgt 600 Ω. Der rein Ohmsche Widerstand der Meßanordnung betrug 100 Ω. Dadurch konnte es vor allem bei kleinen Frequenzen bei der Schaltung mit dem Kondensator zu einer Überlastung des Ausganges kommen, die sich durch das Absinken der Spannung bemerkbar machte.
Weitere Beobachtungen machte ich im Gebiet der hohen Frequenzen. Einerseits begann die Signalform des Generators von der Sinusform abzuweichen. Dies wurde möglicherweise durch die Belastung durch die Schaltung verursacht; denkbar ist auch, daß der Generator an seine Leistungsgrenze stieß. Andererseits wich die gemeßene Spannung noch viel stärker von der Sinusform ab. Es zeigten sich auch deutlich dem Sinussignal überlagerte Schwingungen. Verantwortlich für diese Erscheinungen sind die Kapazitäten der Meßschaltung — Generator, Oszilloskop — und die Induktivitäten der Meßleitungen. Es bildeten sich so schwingungsfähige Gebilde. Sie äußerten sich vor allem dadurch, daß die Spannung am Widerstand zuerst absinkte und dann wieder stieg und ein Phasensprung auftrat.

Die untenstehende Aufnahme wurde bei 130 kHz mit angeschloßener Spule aufgenommen. Die Zeitbasis beträgt 100μs, die Empfindlichkeit des zweiten Kanals ist 0.01V pro cm. Bei leichter Erhöhung der Frequenz wird ein Phasensprung auftreten.

Literatur

[1] Elektrische Netzwerke, McGraw-Hill, 1985

[2] Gehrtsen, Kneser, Physik, Springer Berlin 1969

[3] R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Springer Heidelberg 1967, 1971

[4] M. Pulver, Mathematik Teil2, Hüthig, Heidelberg 1980

[5] Nührmann, Das grosse Werkbuch Elektronik, Franzis, München 1984