Symplektisch–Quasikonforme Abbildungen

Diplomarbeit

der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der Universität Bern

vorgelegt von

Andreas Bieri

1996

Leiter der Arbeit:

Prof. Dr. H. M. Reimann
Mathematisches Institut

Symplektisch–Quasikonforme Abbildungen

Andreas Bieri

Mathematisches Institut
Universität Bern

Vorwort

Wir heben und wir drehen
eine und eine Figur;
wir können fast verstehen
weshalb sie nicht vergehen, –
aber wir sollen nur
tiefer und wunderbarer
hängen an dem was war
und lächeln: ein wenig klarer
vielleicht als vor einem Jahr.

Rilke

Diese Diplomarbeit behandelt einige Aspekte von quasikonformen und symplektischen Abbildungen. Die Theorie der quasikonformen Abbildungen entstand im Bestreben, möglichst umfangreiche Klassen von Abbildungen zu finden, die noch möglichst viele der analytischen und geometrischen Eigenschaften holomorpher Funktionen besitzen sollen.

Im ersten Kapitel dieser Arbeit sind einige Grundlagen für den späteren Gebrauch zusammengestellt. Wo es angebracht schien, habe ich etwas mehr geschrieben, als für das Verständnis unmittelbar notwendig ist. Die zentralen Teile in der Arbeit sind die Kapitel drei und vier. Im dritten Kapitel wird ein allgemeines Grenzwerttheorem für quasireguläre Abbildungen anhand eines Beweises (mehr einer Beweisskizze) von T. Iwaniec ausführlich bewiesen. Die Aussage dieses Theorems ist vom Standpunkt der Variationsrechnung aus eine Folgerung aus der Polykonvexität eines Funktionals. Diese Beobachtung ist die entscheidende Beweisidee.

Die Bemühungen, die Details des Beweises und auch etwas vom „Drumherum" zu verstehen, führten zu einer längeren Reise in die Variationsrechnung. Die Ergebnisse dieses Exkurses sind im zweiten Kapitel festgehalten.

Im vierten und fünften Kapitel betrachte ich spezielle symplektische Abbildungen, die aber auch quasikonform in einem geeigneten Sinne sind (deswegen der Titel). Alle biholomorphen Abbildungen sind von dieser Art. Das Herzstück im vierten Kapitel ist der Beweis des Satzes 4.5; die Aufgabe war, einen offenbar wohlbekannten Sachverhalt über symplektisch–quasikonforme Abbildungen selber zu beweisen.

Das letzte Kapitel schliesst mit ein paar Beobachtungen über Flüsse von symplektischen Abbildungen. Hier gäbe es noch viel zu tun.

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die in irgendeiner Weise zu dieser Arbeit beigetragen haben: Ilka Holopainen für seine Hilfe bei kleineren und grösseren Problemen; Zoltan Balogh und Christoph Leuenberger für die vielen anregenden mathematischen Diskussionen; Thomas Schneider, Anna–Barbara Berger und Daniel Lehner für die Durchsicht dieser Arbeit.

Ein ganz besonderer Dank geht an Herrn Prof. Reimann für seine aufmerksame Betreuung und die Geduld, die er meinen (manchmal sehr diffusen) Ideen entgegenbrachte. Zusammen mit den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe Analysis wusste er eine angenehme Atmosphäre zu schaffen.

Bern, im September 1996 Andreas Bieri

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen

1.1 Aus der Linearen Algebra

Symplektische Matrizen: Eine Matrix A heisst *symplektisch* falls sie

$$A^T J A = J$$

erfüllt. Dabei ist J eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Form $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. J beschreibt die Multiplikation mit i in $\mathbb{C}^n$ in reellen Koordinaten $(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \cong (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$. Wir sehen sofort: symplektische Matrizen haben Determinante 1 und erhalten die Bilinearform $Q(v, w) = v^T \cdot J \cdot w$. Die symplektischen Matrizen bilden zusammen die *symplektische Gruppe* $Sp(2n, \mathbb{R})$. Orthogonale, unitäre und symplektische Matrizen stehen in folgender Beziehung (via $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ fassen wir $M(n, \mathbb{C})$ als Teilmenge von $M(2n, \mathbb{R})$ auf):

$$\begin{aligned} U(n) &\cong O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R}) \\ U(n) &:= \left\{ M \in M(n, \mathbb{C}) : \overline{M}^T = M^{-1} \right\} \\ O(2n) &:= \left\{ M \in M(2n, \mathbb{R}) : M^T = M^{-1} \right\} \end{aligned}$$

Für die Eigenwerte einer symplektischen Matrix gilt der folgende Satz:

Satz 1.1 *([ABKLR, Seite 2]) Ist λ ein Eigenwert einer symplektischen Matrix A mit Multiplizität k, so sind auch $1/\lambda$, $\bar{\lambda}$, $1/\bar{\lambda}$ Eigenwerte von A mit gleicher Multiplizität.*

Cartan-Zerlegung: Im folgenden machen wir häufig von der Cartan–Zerlegung symplektischer Matrizen Gebrauch:
Die maximale kompakte Untergruppe von $Sp(2n, \mathbb{R})$ ist $U(n)$, und jedes Element $S \in Sp(2n, \mathbb{R})$ hat eine *Cartan–Zerlegung*

$$S = K_1 \cdot A \cdot K_2$$

mit $K_1, K_2 \in U(n) = O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R})$ und

$$A = \operatorname{diag}(e^{t_1}, \ldots, e^{t_n}, e^{-t_1}, \ldots, e^{-t_n})$$

wobei e^{2t_j} und e^{-2t_j} die Eigenwerte von $S^T S$ sind.
Symplektische Räume: Ein *symplektischer* Vektorraum (V, ω) ist ein Vektorraum zusammen mit einer *symplektischen Form* ω, d.h. einer nichtdegenerierten, schiefsymmetrischen Bilinearform. In symplektischen Vektorräumen existiert immer eine *kanonische Basis* $(e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n)$, sodass $\omega(e_i, e_j) = 0$, $\omega(f_i, f_j) = 0$, $\omega(e_i, f_j) = -\delta_{ij}$. Die Gramsche Matrix der Bilinearform ω in dieser Basis ist also gleich J.
Das Standardbeispiel eines symplektischen Vektorraumes ist $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit der symplektischen Form $\omega_0 = \sum_{j=1}^n dy_j \wedge dx_j$.
Eine lineare Abbildung $f : (V_1, \omega_1) \to (V_2, \omega_2)$ heisst symplektisch, falls $f^*\omega_2 = \omega_1$ gilt. Die Abbildungsmatrizen symplektischer Abbildungen bez. der kanonischen Basen sind genau die symplektischen Matrizen. Zwei symplektische Vektorräume gleicher Dimension sind stets isomorph: mit Hilfe der kanonischen Basen lässt sich leicht ein symplektischer Isomorphismus („Symplektomorphismus“) angeben.

1.2 Aus der Analysis

1.2.1 Konvexe Funktionen

Wie üblich nennen wir eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *konvex*, wenn sie mit zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält. Für konvexe Funktionen gibt es zwei aequivalente Definitionen, siehe [L, Seite 29]:

Definition 1.2 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst konvex, falls*

$$\forall x, y \in \Omega,\ \forall \lambda \in [0,1] : \qquad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(y)$$

Definition 1.3 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst konvex, falls ihr* Epigraph $\Gamma^+(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n^2+1} : x \in \mathbb{R}^{n^2}, y \geq f(x)\}$ *konvex ist.*

Differenzierbare konvexe Funktionen lassen sich mit Hilfe ihrer Ableitungen charakterisieren:

Satz 1.4 *([D1]). Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*

1. *Falls $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$: f konvex $\Longleftrightarrow f(x) \geq f(y) + < f'(y)\ ,\ x - y > \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$*
2. *Falls $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$: f ist genau dann konvex, wenn die Hesse-Matrix $Hf = D^2 f$ positiv semidefinit ist.*

Die erste Bedingung drückt aus, dass der Graph von f „oberhalb" seiner Tangentialebenen (Tangenten) liegt:

Abbildung 1

Konvexe Funktionen f auf Intervallen haben schöne analytische Eigenschaften:

– Konvexe Funktionen sind auf offenen Intervallen stetig.

– Bis auf abzählbar viele Ausnahmestellen sind sie differenzierbar.

– Die links- und rechtsseitigen Ableitungen existieren überall und es gilt $f'(a-) \leq f'(a+)$.

– Differenzierbare konvexe Funktionen sind stetig differenzierbar.

Für stetige, konvexe $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt entsprechend: f ist fast überall [1] stetig differenzierbar ([Ro, Seite 246]).

[1] Hier und im folgenden bedeutet „fast überall" immer: bis auf eine Menge mit Lebesgue–Mass 0.

Wir werden später die Ungleichung aus Satz 1.4 auch für nicht differenzierbare konvexe Funktionen benötigen. Um den ohnehin langen Beweis im Kapitel 3 etwas abzukürzen, wollen wir diese Behauptung hier begründen (einen strengen Beweis findet man in [D3, Seite 41]):
Durch jeden Randpunkt einer konvexen Menge geht eine sog. *Stützhyperebene* H, d.h. eine Hyperebene, sodass die Menge ganz in einem von ihr abgegrenzten Halbraum liegt [2]. Der Rand braucht dabei keineswegs glatt zu sein (d.h. eine Tangente zu haben). In der Situation von Abschnitt 3.3 bedeutet dies: es gibt überall eine Stützebene H an den Graphen von f so, dass $\Gamma^+(f)$ ganz oberhalb H liegt ([L, Seite 29]):

Abbildung 2

Die Ebenen H lassen sich durch ein (vom Ort abhängiges) Funktional h beschreiben, so dass

$$f(x) \geq f(y) + < h(y), x - y > \qquad \forall x, y \in \Omega$$

auch für nicht differenzierbare f noch gilt. Dabei ist h im allgemeinen nicht stetig, aber es gilt $h(y) = \nabla f(y)$ fast überall (nämlich dort, wo f differenzierbar ist).

1.2.2 Lebesgue-Räume

In diesem und im nächsten Abschnitt ist das analytische Rüstzeug, das vor allem im 3. Kapitel gebraucht wird, zusammengetragen. Als Quelle diente [D1].
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $1 \leq p, q \leq \infty$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definition 1.5 *Die messbare Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ gehört zu $L^p(\Omega)$ falls*

$$(p < \infty) \qquad ||u||_{L^p} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

$$(p = \infty) \qquad essup_{x\in\Omega}\{|f(x)|\} := \inf\{\alpha : |f(x)| < \alpha \textit{ fast überall in } \Omega\} < \infty$$

Mit $L^p_{loc}(\Omega)$ wird der Raum der lokal p–integrierbaren Funktionen bezeichnet:

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{f : \int_K |f(x)|^p dx < \infty \textit{ für alle kompakten } K \subset \Omega\}.$$

Für $p < \infty$ liegt der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^p(\Omega)$. Weitere Eigenschaften sind:

– Die Räume $(L^p(\Omega)\ , ||\cdot||_{L^p})$ sind vollständig und $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum.

[2] Eine einfache Folgerung aus dem Satz von Hahn–Banach.

– Hölder-Ungleichung: Für $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ folgt: fg ist integrierbar und es gilt

$$||fg||_{L^1} \leq ||f||_{L^p} \cdot ||g||_{L^q}.$$

– Darstellungssatz von Riesz: Die topologischen Dualräume von $L^p(\Omega)$ sind

$$\begin{aligned} (L^p)' &= L^q \\ (L^1)' &= L^\infty \\ (L^\infty)' &\supsetneq L^1 \end{aligned}$$

Unentbehrlich ist das *Fundamentallemma der Variationsrechnung:*

Theorem 1.6 *Gilt für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ stets*

$$\int_\Omega u(x)\psi(x)dx = 0 \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

dann ist $u = 0$ fast überall in Ω.

Mehrere Konvergenzbegriffe sind zu unterscheiden:

Definition 1.7 *(starke und schwache Konvergenz)*

1. *f_n konvergiert stark gegen f (Notation: $f_n \to f L^p$) falls $f_n, f \in L^p(\Omega)$ und*

$$\lim_{n\to\infty} ||f_n - f||_{L^p} = 0$$

2. *$(1 \leq p < \infty)$ f_n konvergiert schwach gegen f (Notation: $f_n \rightharpoonup f L^p$) falls $f_n, f \in L^p(\Omega)$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\psi(x)dx = 0 \qquad \forall \psi \in L^q(\Omega)$$

3. *Für $p = \infty$ konvergiert f_n schwach* gegen f (Notation: $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f L^p$) falls $f_n, f \in L^\infty(\Omega)$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (f_n(x) - f(x))\psi(x)dx = 0 \qquad \forall \psi \in L^1(\Omega)$$

Zu dieser Definition sind einge Bemerkungen angebracht:

– Die Limites sind eindeutig, falls sie existieren.

– Starke Konvergenz impliziert die entsprechende schwache. Die Umkehrung gilt nicht, wie folgendes Beispiel zeigt:
$\Omega = (0, 2\pi)$, $f_n(x) := \sin(nx)$. Die Funktionen konvergieren schwach (resp. schwach*) gegen 0, aber nicht stark. Vgl. dazu den Satz von Riemann-Lebesgue.

– Schwache Konvergenz impliziert weder punktweise Konvergenz (fast überall), noch gleichmässige. Punktweise Konvergenz fast überall impliziert *nicht* schwache.

– Aus $f_n \rightharpoonup f L^p$ und $g_n \to g L^q$ folgt $f_n g_n \rightharpoonup f g L^1$. Eine Produktfolge schwach konvergenter Folgen konvergiert im allgemeinen aber nicht !

Mit den Theorem von Riemann–Lebesgue lassen sich leicht Folgen konstruieren, die schwach, aber nicht stark konvergieren:

Theorem 1.8 (Riemann-Lebesgue) *Sei $1 \leq p \leq \infty$, $\Omega = \Pi(a_i, b_i)$ ein offener Quader. Die Funktion $f \in L^p(\Omega)$ werde periodisch auf $\mathbb{R}^n$ fortgesetzt. Für*

$$f_n(x) := f(nx) \qquad \bar{f} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx$$

gilt $f_n \rightharpoonup \bar{f} L^p$ $(p < \infty)$ und $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{f} L^\infty$. Dabei ist $|\Omega|$ das Lebesgue–Mass von Ω.

Das folgende Theorem verrät bereits, dass es eine Verbindung zwischen schwacher Konvergenz und Konvexität gibt (vgl. Kapitel 2):

Theorem 1.9 (Banach-Saks) *Sei $f_n \rightharpoonup f L^p$. Dann gibt es eine Teilfolge f_{n_k}, deren arithmetische Mittel $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m f_{n_k}$ stark gegen f konvergieren.*

1.2.3 Sobolev-Räume

Die Sobolev–Räume sind so etwa die grössten Funktionenräume, in denen sich unsere Art von Differential– und Integralrechnung betreiben lässt.
Der Begriff der partiellen Ableitung muss zuerst verallgemeinert werden (im folgenden bezeichne Ω eine offene Menge):

Definition 1.10 *Eine Funktion $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ heisst schwache (partielle) Ableitung von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ nach der Variablen x_i, geschrieben $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, falls*

$$\int_\Omega v(x)\psi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)dx \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Die schwache Ableitung ist eindeutig bestimmt (fast überall) und die üblichen Regeln gelten weiterhin. An Differenzierbarkeitsstellen stimmen die schwache und die übliche Ableitung überein.

Definition 1.11 *Die Sobolev–Räume $W^{1,p}(\Omega)$ rsp. $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ sind definiert durch*

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &:= \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ schwach ableitbar mit } u \in L^p(\Omega) \text{ und } \nabla u \in (L^p(\Omega))^n\} \\ W^{1,p}_{loc}(\Omega) &:= \{u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ schwach ableitbar mit } u \in L^p_{loc}(\Omega) \text{ und } \nabla u \in (L^p_{loc}(\Omega))^n\} \end{aligned}$$

und tragen die Normen

$$\begin{aligned} ||u||_{W^{1,p}} &:= (||u||^p_{L^p} + ||\nabla u||^p_{L^p})^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < \infty \\ ||u||_{W^{1,\infty}} &:= \max\{||u||_{L^\infty}, ||\nabla u||_{L^\infty}\} \qquad p = \infty \end{aligned}$$

Mit $W^{1,p}_0(\Omega)$ wird der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Normtopologie von $W^{1,p}(\Omega)$ bezeichnet. Die Räume $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ sind dadurch erklärt, dass jede Komponente von $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ in $W^{1,p}(\Omega)$ sein soll. Eine Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ konvergiert (schwach), wenn sie und die Folge der Ableitungen in $L^p(\Omega)$ (schwach) konvergieren.

Bemerkungen:

- Für beschränkte Gebiete gilt: $C^1(\bar{\Omega}) \subsetneq W^{1,\infty}(\Omega) \subsetneq W^{1,p}(\Omega) \subsetneq L^p(\Omega)$
- Die Räume $(W^{1,p}(\Omega)\ , ||\cdot||_{W^{1,p}})$ sind abgeschlossen und $W^{1,2}(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum.
- Für $1 \le p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega)$ separabel und für $1 < p < \infty$ reflexiv.
- Für $1 \le p < \infty$ ist $C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$.
- Die Funktionen in $W^{1,p}(\Omega)$ brauchen nicht stetig zu sein; hinreichend für die Stetigkeit ist $p > n$.

In Sobolev–Räumen gelten einige tiefliegende Theoreme, so z.B. die Ungleichung von Poincaré und die Einbettungssätze von Sobolev (über Einbettungen $W^{1,p} \subset L^r$).

1.3 Quasikonforme Abbildungen in $\mathbb{C}$

Die klassische Funktionentheorie zeigt, dass eine reichhaltige Theorie konformer Abbildungen der Ebene existiert. Im Gegensatz dazu gibt es in höheren Dimensionen nur sehr wenige konforme Abbildungen , nämlich nur die Möbiustransformationen (dies ist ein Satz von Liouville). Durch teilweisen Verzicht auf die Konformität hoffte man, eine grössere Klasse von Abbildungen zu erhalten, ohne allzuviel zu verlieren. In der Tat hat sich im Laufe der Zeit herausgestellt, dass quasikonforme Abbildungen noch viele Eigenschaften von konformen besitzen und gleichzeitig dennoch flexibel genug sind.
Wir beschränken uns hier auf den $\mathbb{R}^2$ und differenzierbare Abbildungen. Für die allgemeineren Definitionen und Erweiterungen schlage man im Kapitel 3 nach. Standardwerke über quasikonforme Abbildungen sind [LV] und [V].
Die Abbildung $f : D \to G$ ist in diesem Abschnitt immer ein C^1-Diffeomorphismus zwischen Gebieten in $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$.

Definition 1.12 *(Lineare Dilatation)*
Die Abbildung $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei linear und bijektiv. Wir setzen

$$\lambda_1 := \max_{|h|=1} |Ah| \qquad \lambda_2 := \min_{|h|=1} |Ah| \qquad K(A) := \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

und nennen $K(A)$ die lineare Dilatation *von A.*

Die lineare Dilatation ist also der Quotient aus den Längen der grösseren und kleineren Halbachse der Ellipse $A(S^1)$:

Abbildung 3

Definition 1.13 *(Differenzierbare quasikonforme Abbildungen)*
Ein Diffeomorphismus $f : D \to G$ heisst K–quasikonform*, falls*

1. $det f_* > 0$ *(f ist orientierungserhaltend)*
2. $K(f_*(z)) \leq K \qquad \forall z \in D$.

Für konforme Abbildungen $f : z = x + iy \mapsto f(z)$ gilt bekanntlich

$$f_{\bar{z}} := \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Die sogenannte *komplexe Dilatation*

$$\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$$

ist genau dann gleich Null, wenn f konform ist: $\mu = 0$ gilt genau dann, wenn f die Cauchy–Riemann–Gleichungen erfüllt.
Wie eine Rechnung zeigt, gilt $det f_* = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$ und daher $|f_z| > |f_{\bar{z}}|$ und es folgt

$$|\mu| < 1.$$

Für K–quasikonforme Abbildungen ist die komplexe Dilatation von 1 wegbeschränkt:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{\alpha} |\partial_\alpha f(z_0)| = |f_z| + |f_{\bar{z}}| \\ \lambda_2 &= \min_{\alpha} |\partial_\alpha f(z_0)| = |f_z| - |f_{\bar{z}}| \end{aligned}$$

(Länge der längeren Halbachse = grösste Richtungsableitung $\partial\alpha$ im Punkt z_0).
Also

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|} = \frac{1 + \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}}{1 - \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}} = \frac{1 + ||\mu||_\infty}{1 - ||\mu||_\infty}.$$

Nach Definition gilt

$$\sup_z \frac{\lambda_1(z)}{\lambda_2(z)} \leq K \Longrightarrow ||\mu||_\infty \leq \frac{1-K}{1+K} =: \kappa < 1.$$

Eine K–quasikonforme Abbildung erfüllt also die *Beltrami–Gleichung*

$$f_{\bar{z}} = \mu \cdot f_z \qquad ||\mu||_\infty \leq \kappa < 1.$$

Wir werden später die komplexe Dilatation und die Beltrami–Gleichung in etwas anderer Form wieder antreffen.

1.4 Aus der mehrdimensionalen Funktionentheorie

Holomorphe Abbildungen: Es gibt verschiedene, gleichwertige Definitionen für den Begriff „holomorphe Funktion mehrerer Variablen“; wir legen uns auf die folgende Definition fest:

Definition 1.14 *Eine stetig differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ist holomorph, wenn sie in jeder Variablen getrennt holomorph ist. Eine Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, f(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z))$ ist holomorph, wenn alle Koordinatenfunktionen $f_i(z)$ holomorph sind.*

Die Cauchy–Riemann–Gleichungen für Abbildungen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x+iy \mapsto u(x,y)+iv(x,y)$ lassen sich durch die Gleichung

$$f_* \circ J = J \circ f_* \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ausdrücken; dabei ist f_* die Ableitungsmatrix von f in „reellen Koordinaten": $f_* = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$.
Die Matrix J entspricht der Multiplikation mit i. Offensichtlich nun ist eine stetig differenzierbare Abbildung $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ genau dann holomorph, wenn in den reellen Koordinaten $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \cong (z_1, \ldots, z_n)$ die Gleichung

$$f_* \circ J_n = J_n \circ f_* \qquad J = \begin{pmatrix} J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J \end{pmatrix} \in M(n, \mathbb{C})$$

erfüllt ist ([Ko, Prop. 2.2]).
Der Bergman–Kern: Beschränkte Gebiete in $\mathbb{C}^n$ sind in kanonischer Weise mit einer hyperbolischen Metrik ausgestattet. Diese Metrik beruht auf der Bergman–Kernfunktion, die wir hier kurz vorstellen wollen; die Metrik selber werden wir im 4. Kapitel antreffen.
Sei $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ein Gebiet. Der Bergman–Raum ist definiert durch:

$$A^2(\Omega) := \{f \text{ holomorph in } \Omega : \int_\Omega |f(z)|^2 dV(z) = ||f||^2_{A^2(\Omega)} < \infty\}$$

Hier ist $dV(z)$ die übliche Volumenform im $\mathbb{R}^{2n}$. Mit dem Skalarprodukt

$$< f, g > := \int_\Omega f(z)\overline{g(z)} dV(z)$$

wird $A^2(\Omega)$ zu einem Hilbertraum. Für festes $z \in \Omega$ ist das Funktional

$$\Phi_z : f \mapsto f(z) \qquad f \in A^2(\Omega)$$

stetig auf $A^2(\Omega)$ und der Darstellungssatz von Riesz liefert uns ein $k_z \in A^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft

$$\phi_z(f) = f(z) = < f, k_z > \qquad \forall z \in \Omega, f \in A^2(\Omega).$$

Der *Bergman–Kern* ist die Funktion $K(z,\zeta) = \overline{k_z(\zeta)}$. Er ist konjugiert symmetrisch: $K(z,\zeta) = \overline{K(\zeta, z)}$ und hat die „reproduzierende Eigenschaft"

$$f(z) = \int_\Omega K(z,\zeta) f(\zeta) dV(\zeta) \qquad \forall f \in A^2(\Omega).$$

In diesem Sinne gleicht K dem Cauchy–Integralkern. Zusammen mit $K(\cdot, \zeta) \in A^2(\Omega)$ charakterisieren diese beiden Eigenschaften K bereits eindeutig.
Der Bergman–Kern kann Nullstellen aufweisen; für beschränkte Ω gilt jedoch $K(z,z) > 0$.
Nur für sehr spezielle, symmetrische Gebiete gelingt es, K explizit zu berechnen; für die Einheitskreisscheibe gilt beispielsweise $K(z,\zeta) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1-z\bar{\zeta})^2}$.
Ein Standardwerk über die Funktionentheorie mehrerer Variablen ist das Buch von S. G. Krantz [K].

2 Exkurs über Variationsrechnung

2.1 Allgemeines zur Variationsrechnung

Die Variationsrechnung befasst sich mit der Minimierung (resp. Maximierung) von Funktionalen (=Funktionen auf Funktionenräumen). Speziell handelt es sich um Funktionale der Form

$$I(u) := \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x)) dx$$

mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen (allenfalls beschränkt) und stetigen Abbildungen $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$, die unter zusätzlichen Bedingungen zu minimieren sind. Die zugelassenen Funktionen u stammen aus einem geeigneten Sobolev-Raum.
Einige Beispiele zeigen typische Probleme:

(P1) Das Dirichlet-Problem: Löse

$$\inf\{I(u) = \int_\Omega \frac{1}{2} ||\nabla u(x)||^2 dx : u = u_0 \text{ auf } \partial\Omega\} \qquad (n > 1, N = 1)$$

Dieses Problem lässt sich auch als Differentialgleichung mit Randbedingungen formulieren (Laplace-Gleichung, siehe Abschnitt 2.2.1).

Bekanntlich ist (P1) unter leichten Voraussetzungen an Ω eindeutig lösbar.

(P2) Das Variationsproblem

$$\inf\{I(u) = \int_0^1 f(u'(x)) dx : u(0) = u(1) = 0, f(\xi) = (\xi^2 - 1)^2\}$$

hat die gebrochene Lösung

$$u(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1/2) \\ 1 - x & x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(P3) Bogenlänge mit Randbedingungen: Wähle zwei Punkte A und B in $\mathbb{R}^2$ und einen Vektor v, sodass $B - A$ und v linear unabhängig sind. Das Variationsproblem besteht darin, die Bogenlänge von stetig differenzierbaren Kurven $\gamma : \gamma(0) = A, \gamma(1) = B$ unter den Randbedingungen $\dot\gamma(0) = \dot\gamma(1) = v$ zu minimieren.

Abbildung 4

Die Bogenlänge nimmt in dieser Situation kein Minimum an.

Zur Lösung von Variationsproblemen gibt es zwei Strategien:
Die klassischen Methoden. Sie verallgemeinern die bekannten Kriterien aus der Kurvendiskussion differenzierbarer Funktionen. Ein solches Kriterium ist die Euler-Langrange-Gleichung. Prinzipiell geben uns diese Kriterien eine Möglichkeit in die Hand, ein Variationsproblem explizit zu lösen. Allerdings sind gerade die Existenzfragen problematisch, denn die minimierenden Funktionen sind möglicherweise nicht differenzierbar.
Direkte Methoden. Im Gegensatz zu den klassischen liefern die direkten Methoden keine expliziten Lösungen, sondern nur Existenz– und manchmal Eindeutigkeitsaussagen. Diese Lösungsstrategien bestehen aus den folgenden Schritten:

- Wähle einen geeigneten Funktionenraum X und nimm an, es sei eine minimierende Folge u_n für das Funktional I gewählt:

$$I(u_n) \to \inf\{I(u) : u \in X\}.$$

- Zeige die Folgenkompaktheit von X: es gibt ein $\bar{u} \in X$ so, dass $u_n \to \bar{u}$ konvergiert.
- Zeige die Unterhalbstetigkeit des Funktionals, d.h. $\liminf I(u_n) \geq I(\bar{u})$.

Dann ist $\bar{u}$ ein Minimum für I. Aussagen über die Eindeutigkeit erhält man allerdings nicht ohne zusätzliche Arbeit.

2.2 Klassische Methoden

2.2.1 Die Euler-Lagrange-Gleichung

Von den verschiedenen klassischen Methoden und Kriterien sei hier nur die *Euler-Lagrange-Gleichung* vorgestellt. Die Sprechweise ist physikalisch motiviert: es sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zwei Zeitpunkte $a, b \in I$ seien gewählt und die Anfangs– und Endkonfigurationen $x(a)$ und $x(b)$ vorgegeben. Gegeben ist ausserdem eine (C^2–) Wirkungsfunktion $L : I \times G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Gesucht sind solche C^1-Kurven $\varphi : [a, b] \to G$, $\varphi(a) = x(a)$, $\varphi(b) = x(b)$, für die das Wirkungsintegral

$$S(\varphi) := \int_a^b L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))dt$$

längs der erweiterten Zustandskurve $(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))$ zu φ extremal oder zumindest stationär ist.

Theorem 2.1 *(Euler-Lagrange)*
Die Wirkungsfunktion L sei zweimal stetig differenzierbar. Dann ist das Wirkungsintegral $S(\varphi)$ längs der C^2-Kurve $\varphi : [a, b] \to G$ genau dann stationär, wenn φ die Gleichung

$$\frac{d}{dt}D_2L = D_1L \quad \text{d.h.} \quad \frac{d}{dt}(D_2L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t))) = D_1L(t, \varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \qquad (E)$$

erfüllt. Dabei sind D_1 und D_2 die Ableitungen nach dem zweiten bzw. dritten Argument von L. Wählt man eine Basis von $\mathbb{R}^n$ mit Ortskoordinaten q_i und Geschwindigkeitskoordinaten $\dot{q}_i$, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

Details stehen in [SW].

Das Auffinden der extremalen aus den stationären Kurven ist häufig delikat. Ein einfaches Kriterium ist:

- Erfüllt φ die Gleichung (E) und ist $L(t,\cdot,\cdot)$ konvex für alle t, so ist $S(\varphi)$ minimal. Bei strenger Konvexität ist das Minimum eindeutig.
- Trifft obige Bedingung nicht zu, so handelt es sich im allgemeinen um kein Minimum.

Die Gleichung (E) ist insofern nur von beschränktem Nutzen, als sie nichtdifferenzierbare Lösungen nicht erfassen kann. Ein Beispiel:
$I = [-1, 1]$, $L(t, u, v) = u^2(1 - v)^2 = L(u, v)$; $u(-1) = 0$, $u(1) = 1$.
Eine Lösung ist ([D1, 2.1.4.4])

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & t \in [-1, 0] \\ t & t \in (0, 1] \end{cases}$$

Ein weiteres Beispiel ist das Problem der minimalen Rotationsflächen; dort treten gebrochene Lösungen auf:

Abbildung 5

Beispiele von Euler–Lagrange–Gleichungen:

1. $L(t, u, v) = \frac{1}{2}||v||^2$. Dann lautet (E): $\quad \Delta u = 0$.
2. $L(t, u, v) = \frac{1}{p}||v||^p, p > 1$. (E): $\quad \mathrm{div}(||\nabla u||^{p-2}\nabla u) = 0$.

Wir wollen die Euler-Gleichungen noch in anderer Form schreiben:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Es gelte, das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx$$

unter gewissen Bedingungen (z.B. $u = u_0$ auf dem Rand) zu minimieren.
Jedes Minimum $u \in C^2(\overline{\Omega})$ erfüllt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}[f_{\xi_i}(x, u(x), \nabla u(x))] = f_u(x, u(x), \nabla u(x)) \qquad (E')$$

Diese Gleichung lässt sich auf $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ verallgemeinern.

2.2.2 Die kanonischen Gleichungen

In diesem Abschnitt soll die Brücke von der Variationsrechnung zur Hamiltonschen Mechanik und der symplektischen Geometrie geschlagen werden.
Betrachte zuerst die klassische Mechanik. Es sei

- $t \mapsto q(t) = (q_1(t), \cdots, q_n(t))$ die Bahnkurve des Systems S
- $U = U(q_1, \cdots, q_n)$ die potentielle Energie
- $T = T(q_1, \cdots, q_n)$ die kinetische Energie und

Die Funktion $L = T - U$ heisst *Lagrange–Funktion* von S.

Theorem 2.2 *(Hamilton-Prinzip) In einem konservativen Kraftfeld verläuft die Bahn des Systems S zwischen den Konfigurationen $q(t_0)$ und $q(t_1)$ so, dass das Wirkungsintegral $\int_{t_0}^{t_1} Ldt$ extremal ist.*

Eine genauere mathematische Formulierung findet sich in [SW, Seiten 365f].
Die Bewegungsgesetze von Newton besagen, dass ein Teilchen der Masse m in einem Potentialfeld $\nabla V(q)$ sich so bewegt, dass $m\dot{q} = -\nabla V(q)$. Durch Einführen des Impulses $p_i = mq_i$ und der Energie $H(p,q) = \frac{1}{2m}||p||^2 + V(q)$ gehen die Newton-Gesetze in die *kanonischen Gleichungen*

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$$

über. Die Schiefsymmetrie in diesen Gleichungen führt uns zur symplektischen Geometrie:

Definition 2.3 *Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einer geschlossenen, nichtdegenerierten 2-Form ω. Eine glatte Abbildung $f : (M, \omega) \to (N, \rho)$ heisst symplektisch, falls*

$$f^* \rho = \omega$$

Eine Differentialform ω ist geschlossen, wenn für die äussere Ableitung $d\omega = 0$ gilt. Nichtdegeneriert bedeutet: In jedem Tangentialraum T_pM folgt aus $\omega_{|T_pM}(X_p, Y_p) = 0 \quad \forall X_p \in T_pM$ dass $X_p = 0$. Ein Satz von Darboux zeigt, dass lokal Koordinaten $(q_1, p_1, \cdots, q_n, p_n)$ so existieren, dass $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ die Standardstruktur ist (lokal sehen also alle symplektischen Mannigfaltigkeiten gleich aus). In diesen Koordinaten gehen die Euler–Lagrange–Gleichungen in die obigen kanonischen Gleichungen über.

Definition 2.4 *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $H : M \to \mathbb{R}$ glatt. Das Vektorfeld X_H auf M definiert durch*

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot)$$

heisst das Hamilton–Vektorfeld *zur Energiefunktion H.*

In den kanonischen Koordinaten gilt

$$X_H = (\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}) = -J\nabla H.$$

Die Hamilton–Vektorfelder haben die folgenden Eigenschaften:

– Die Integralkurven von X_H liegen auf Flächen konstanter Energie.

– Aequivalent sind: X ist lokal hamiltonsch. $\Leftrightarrow$ $\omega(X, \cdot)$ ist geschlossen. $\Leftrightarrow$ Der Fluss von X besteht aus symplektischen Abbildungen.

– Hamilton-Felder erhalten das „Phasenvolumen“ $\Omega = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$.

Wir werden im vierten und fünten Kapitel auf symplektische Flüsse treffen.

2.3 Direkte Methoden

2.3.1 Der Fundamentalsatz der Variationsrechnung

Definition 2.5 *M sei ein Hausdorff-Raum. Eine Funktion $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ heisst in $x_0 \in M$ unterhalbstetig (lower semicontinuous, lsc) falls für alle $\varepsilon > 0$ der Punkt x_0 innerer Punkt von $\{x \in M : f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$ ist.*

Für jede gegen x_0 konvergente Folge $\{x_n\}$ gilt dann $f(x_0) \leq \liminf f(x_n)$.
Die Umkehrung davon gilt auch, wenn M erstabzählbar ist, vgl. [BB, Seite 17]. Wenn im folgenden von schwach stetig oder von schwach abgeschlossen die Rede ist, ist das immer hinsichtlich Folgen zu verstehen.
Als Verallgemeinerung des Satzes von Weierstrass gilt der *Fundamentalsatz der Variationsrechnung:*

Theorem 2.6 *Sei M hausdorff, $f : M \to \overline{\mathbb{R}}$ unterhalbstetig. Es gebe $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass*

i) $M_{f,\lambda} := \{x \in M : f(x) \leq \lambda\} \neq \emptyset$

ii) $M_{f,\lambda}$ *ist (folgen-) kompakt.*

Dann besitzt f einen minimierenden Punkt x_0 in M.

Bemerkung: Selbst einfache Funktionale f sind nicht stetig, z.B. ist die Bogenlänge nur unterhalbstetig.
Auch über die Eindeutigkeit lässt sich etwas sagen:

Theorem 2.7 *Ist M eine konvexe Menge eines Vektorraums und ist $f : M \to \mathbb{R}$ strikt konvex, so besitzt f höchstens einen minimierenden Punkt in M.*

Die Normtopologie eines Banachraumes besitzt häufig zu wenig kompakte Mengen. Wichtig ist deshalb die schwache Topologie (alle Elemente des Dualraumes sind stetig).

Definition 2.8 *Seien X ein Banachraum, $M \subset X$. $f : M \to \mathbb{R}$ ist im Punkt $x_0 \in M$ schwach folgenunterhalbstetig falls für jede Folge $\{x_n\}$ in M mit $x_0 = \lim x_n$ (schwacher Limes) die Ungleichung $f(x_0) \leq \liminf f(x_n)$ gilt.*

Beispiel: Die Norm eines Banachraumes ist schwach unterhalbstetig, aber nicht schwach stetig! Vgl. [BB, Seite 22].
Wir wollen den Fundamentalsatz etwas umformulieren und brauchen zuerst einige Lemmata:

Lemma 2.9 *Sei M schwach abgeschlossen. Dann gilt:*

$$f : M \to \mathbb{R} \text{ schwach unterhalbstetig} \iff M_{f,\lambda} \text{ schwach abgeschlossen } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Eine im folgenden nicht benutzte Anwendung dieses Lemmas ist:

Lemma 2.10 *Sei M konvex und abgeschlossen, f stetig und konvex auf M. Dann ist f schwach unterhalbstetig.*

Lemma 2.11 *Ist f koerziv (d.h.: aus $||x|| \to \infty$ folgt $f(x) \to \infty$) so sind alle $M_{f,\lambda}$ beschränkt.*

Theorem 2.12 *(Eberlein) In einem reflexiven Banachraum ist jede beschränkte Teilmenge relativ kompakt in der schwachen Topologie.*

Ist X reflexiv, so sind die $M_{f,\lambda}$ schwach kompakt (Lemma 3 und der Satz von Eberlein) und man erhält folgende Version des Fundamentalsatzes:

Theorem 2.13 *Sei M eine schwach abgeschlossene Teilmenge eines reflexiven Banachraumes X und sei f koerziv und schwach unterhalbstetig. Dann ist $\inf_{x\in M}\{f(x)\}$ endlich und wird an einer Stelle in M angenommen.*

2.3.2 Unterhalbstetigkeit

Vorgelegt sei das Funktional

$$I(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx$$

mit der vektorwertigen Funktion $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.
Das nächste klassische Resultat leitet schon zum Begriff „quasikonvex“ über:

Theorem 2.14 *([D2, Seite 7]). Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen, $\{u_n\}, \bar{u} : \Omega \to \mathbb{R}^N$ derart, dass $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u} L^\infty$; $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sei stetig und $I(u, \Omega) := \int_\Omega f(u(x))dx$. Dann gilt:*

i) I ist stetig bez. der schwachen Konvergenz (alle Ω) genau dann, wenn f affin ist.

ii) I ist genau dann schwach-unterhalbstetig, wenn f konvex ist.*

Dies gilt sinngemäss auch für $L^p, p \geq 1$; siehe [Mo2].

Der Beweis beruht auf dem Satz vom Riemann–Lebesgue und dem Lemma von Mazur (enthalten im Satz von Banach-Saks). Da Ω beliebig sein darf, erhält man aus $f(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} lL^\infty$ für jede Folge $\{u_n\}$ mit $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ die folgenden punktweisen Vergleiche:

$$l = f(u) \quad \text{f.ü.} \iff \text{ f affin} \qquad l \geq f(u) \quad \text{f.ü.} \iff \text{ f konvex} .$$

Werden an die Folgen $\{u_n\}$ zusätzliche Bedingungen gestellt, so gibt es im allgemeinen mehr schwach unterhalbstetige Funktionale als in Theorem 2.14: Im „Kontext der Variationsrechnung“, d.h. wenn u_n die Form $u_n = \nabla v_n$ hat, sind es genau die Funktionale mit *quasikonvexen* Integranden f.

2.3.3 Quasikonvexe Funktionen

Das erste Theorem ([D2, Seite 40]) schliesst unmittelbar an den vorhergehenden Abschnitt an:

Theorem 2.15 *Sei $f : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ stetig. Notwendig und hinreichend für die schwache Unterhalbstetigkeit von $I(u)$ in $W^{1,\infty}$, d.h.*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f(\nabla u_n(x))dx \geq \int_\Omega f(\nabla u(x))dx$$

ist die Quasikonvexität von f.

Es spielt hier eine wesentliche Rolle, ob Funktionale der Form $\int f(u(x))dx$ oder $\int f(\nabla u(x))dx$ minimiert werden.

Definition 2.16 *([D2, Seiten 39f]) Die Funktion $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ heisst quasikonvex, wenn*

$$\int_G f(\mu + \nabla v(x))dx \geq \int_G f(\mu)dx = |G|f(\mu)$$

für alle beschränkten Gebiete $G \subset \mathbb{R}^n$, alle $\mu \in \mathbb{R}^{nN}$ und alle $v \in C_0^\infty(G, \mathbb{R}^N)$ (d.h. $v = 0$ auf ∂G). $|G|$ ist das Lebesgue–Mass von G.

Das Theorem gilt auch in $W^{1,p}$ unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen (siehe [Mo1]). Der Einfachheit halber ist Theorem 2.15 nur für Integranden der Form $f(x, u, \xi) = f(\xi)$ formuliert; ähnliche Sätze gelten auch im allgemeinen Fall ([D2]).
Einige Beispiele sollen den doch ziemlich undurchschaubaren Begriff illustrieren:

- Für $N = 1$ oder $n = 1$ ist quasikonvex dasselbe wie konvex.
- Ist f konvex, dann ist f auch quasikonvex. Die Umkehrung gilt nicht.
- Ist $f(\mu) = g(\det \mu)$, so ist f quasikonvex genau dann, wenn g konvex ist.

Der letzte Punkt wirft die Frage auf, ob es weitere Funktionen gibt, die einer konvexen Funktion g vorgeschaltet werden können und eine quasikonvexe liefern. Es sind dies die sogenannten *quasiaffinen* oder *Null–Lagrange*–Funktionen.

2.3.4 Quasiaffine Funktionen

Klassisch ist die folgende Beobachtung ([D2]):

Lemma 2.17 *Sei $u \in W_0^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^N)$ und subdet(∇u) sei eine beliebige Unterdeterminante der Matrix $\nabla u \in \mathbb{R}^{nN}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega \textit{subdet}(\nabla u(x))dx = 0$$

Definition 2.18 *$\phi : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ heisst quasiaffin (Null–Lagrange–Funktion), falls ϕ und $-\phi$ quasikonvex sind.*

Quasiaffine Funktionen lassen sich explizit beschreiben:

Theorem 2.19 *([D2, 5.4],[BCO, 3.4]). Aequivalent sind:*

i) ϕ *ist quasiaffin.*

ii) $\forall \mu \in \mathbb{R}^{nN}, v \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$*:*

$$\int_\Omega \phi(\mu + \nabla v(x))dx = \int_\Omega \phi(\mu)dx = \phi(\mu) \cdot |\Omega|$$

iii) $\phi(\mu) - \phi(0)$ *ist eine Linearkombination von Unterdeterminanten der Matrix* $(\mu) \in M(n \times N, \mathbb{R})$*.*

Das Resultat *iii)* bleibt sogar richtig, wenn man höhere partielle Ableitungen von v statt nur die ersten zulässt, siehe [BCO].
Quasiaffine Funktionen verhalten sich wie affine Funktionen:

– Addition einer quasiaffinen Funktion zum Variationskern ändert die Minimalstellen nicht (beachte Theorem 2.15).

– Die Euler–Lagrange–Gleichungen sind bei einem quasiaffinen Integranden für alle u identisch erfüllt (wie bei affinen Integranden).

Theorem 2.20 *([BCO, Seite 160]) Es sei* $\phi : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ *quasiaffin. Dann ist* $f = g \circ \phi$ *genau dann quasikonvex, wenn* g *konvex ist.*

Solche quasikonvexe Funktionen wie in Theorem 2.20 heissen **polykonvex**. Die meisten Beispiele quasikonvexer Funktionen sind auch polykonvex, denn Polykonvexität ist leichter verfizierbar als Quasikonvexität:

Theorem 2.21 *Für* $f : \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}$ *sind äquivalent:*

i) f *ist polykonvex*

ii) für alle $A \in \mathbb{R}^{nN}$ *gibt es* $h(A) \in \mathbb{R}^\tau$ *so, dass*

$$f(B) \geq f(A) + < h(A), B\sharp - A\sharp > \quad \forall B \in \mathbb{R}^{nN}$$

Dabei sind $<>$ *das Standardskalarprodukt,* τ *die Anzahl aller möglicher Unterdeterminanten einer* $n \times N$*–Matrix und* $A\sharp$ *ein aus diesen Unterdeterminanten von* A *gebildeter Vektor.*

Man könnte eine Funktion ϕ auch polyaffin nennen, falls ϕ und $-\phi$ polykonvex sind; wegen des obigen Satzes und Theorem 2.19 bedeuten polyaffin und quasiaffin dasselbe.
Beispiele für die Anwendung der direkten Methode der Variationsrechnung bei polykonvexen Integranden finden sich in [BCO] und in den Arbeiten von T. Iwaniec. Ein polykonvexes Funktional tritt auch im 3. Kapitel auf.

3 Der Grenzwertsatz

3.1 Definitionen

Im folgenden sei $f \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen ist und $1 \leq p \leq \infty$. Die Bezeichnungen folgen [HK] und [IL].

Definition 3.1 *Eine messbare Funktion $K_f(\cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ heisst eine* Dilatation[3] *von f, falls $1 \leq K_f(x) < \infty$ und $||Df(x)||^n \leq K_f^{n-1}(x) J(f,x)$ für fast alle $x \in \Omega$ gelten.*

Dabei ist Df die formale Ableitungsmatrix bestehend aus den partiellen (schwachen) Ableitungen von f, $||Df(x)||$ ist die Supremumsnorm (Operatornorm) der Matrix $Df(x)$:

$$||Df(x)|| = \max_{||h||=1} ||Df(x)h||$$

und $J(f,x)$ ist die Determinante von $Df(x)$.

Definition 3.2 *Die Abbildung f ist eine Abbildung mit* endlicher Dilatation*, falls es eine Dilatation K_f von f gibt. Die kleinste solche Funktion ist die Dilatation von f. Ist K_f integrierbar (d.h. in einem $L^r(\Omega)$) oder beschränkt ($K_f \in L^\infty(\Omega)$) , dann heisst f eine Abbildung mit integrierbarer rsp. beschränkter Dilatation.*

Eine Abbildung $f \in W^{1,n}_{loc}$ mit beschränkter Dilatation heisst auch *quasiregulär*; für sie gilt also

$$||Df(x)||^n \leq K \cdot J(f,x) \qquad \text{für fast alle } x \in \Omega.$$

Ein quasiregulärer Homöomorphismus ist eine *quasikonforme* Abbildung. In der Tat sind alle Abbildungen in $W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ mit endlicher Dilatation stetig:

Theorem 3.3 *([HK, Thm. 3.1]) Es sei $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ eine Abbildung mit endlicher Dilatation. Dann gilt:*

1. *f hat einen stetigen Vertreter (lässt sich also auf einer Nullmenge zu einer stetigen Abbildung umdefinieren).*
2. *f ist fast überall differenzierbar im gewöhnlichen Sinne.*
3. *f ist orientierungstreu (als stetige Abbildung).*
4. *f erfüllt die Bedingung (N): für jede Lebesgue–Nullmenge $E \subset \Omega$ ist auch das Bild $f(E)$ eine Nullmenge.*

Als weiteren Begriff gibt es die *lineare Dilatation*, die wir bereits kennen:

$$H_f(x) = \frac{\max_{||h||=1} ||Df(x)h||}{\min_{||h||=1} ||Df(x)h||}$$

Wenn die Ableitung an einer Stelle x nicht existiert, setzen wir dort $H_f(x) = 1$. Mit etwas linearer Algebra beweist man:

$$\mathcal{K}_f \leq H_f \leq \mathcal{K}_f^{n-1}.$$

Wir sprechen von K–quasiregulären Abbildungen wenn die lineare Dilatation durch die Konstante K beschränkt ist: $\sup_x H_f(x) \leq K$. Wegen $\mathcal{K}_f(x) \leq K$ gilt dann auch

$$||Df(x)||^n \leq K^{n-1} J(f,x).$$

[3]Statt Dilatation ist auch Distortion üblich.

3.2 Quasireguläre Abbildungen und Variationsrechnung

Dieser Abschnitt ist ein Exkurs über Variationsrechnung und quasireguläre Abbildungen. Die hier zusammengestellte Übersicht stammt vorwiegend aus den Einleitungen verschiedener Arbeiten von T. Iwaniec ([I1,I2,IL]) und den Kapiteln 3 und 5 von [HKM].
Intuitiv stellt man sich quasireguläre Abbildungen als nicht „allzuweit entfernt“ von konformen (analytischen) Abbildungen vor. Beispielsweise sind quasireguläre Abbildungen unter milden Regularitätsvoraussetzungen offen und diskret (= das Urbild eines Punktes besteht aus isolierten Punkten), siehe [HK].
Eine Möglichkeit, die Abweichung von der Konformität zu messen, besteht darin, sogenannte *Energie–Funktionale* zu betrachten:

$$\epsilon[f] = \int_\Omega E(\nabla f)dx$$

Dabei ist E jeweils ein Variationskern, der genau auf $\{\lambda A : A \in SO(n), \lambda \geq 0\}$ verschwindet.
In der Elastizitätstheorie ist $\epsilon[f]$ die gespeicherte Energie, die unter der Deformation in den Körper gesteckt wird.
Als Beispiel möge das Funktional

$$I_p[f] = \int_\Omega ((\nabla f)^n - n^{\frac{n}{2}} J(f,x))^{\frac{p}{2}} dx \qquad 1 < p < \infty$$
$$f \in W^{1,\frac{np}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

dienen. Iwaniec und Lutoborski ([IL]) zeigten für $p \geq 2$, dass zu vorgegebenen Randwerten (d.h. $g \in W^{1,\frac{np}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $f - g \in W_0^{1,\frac{np}{2}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) stets Minima existieren. [4] Berühmt ist auch eine starke (oder besser: schwache ?) Verallgemeinerung eines **Theorems von Liouville**:
Die absoluten Minima für $p \geq 2$ sind Möbius–Transformationen oder konstante Abbildungen. Die stationären Lösungen zu vorgeschriebenen Randwerten sind dann „möglichst konforme“ Fortsetzungen der vorgegebenen Abbildung der Ränder. Als generelle Schwierigkeit erweist sich, dass die Variationskerne, welche genau auf den konformen Matrizen verschwinden, nicht konvex sind. Die Standardresultate über Existenz und Eindeutigkeit von Minimas setzen aber konvexe (und koerzive) Integranden voraus. Die Konvexität lässt sich glücklicherweise durch die schwächere Bedingung der Polykonvexität ersetzen. Koerziv wird durch koerziv im Mittel (mean–coercive) ersetzt. Die direkten Methoden der Variationsrechnung lassen sich also dennoch einsetzen.
Wir wollen die Analogien mit konformen Abbildungen noch von einem etwas anderen Standpunkt aus weiterverfolgen. So, wie harmonische Funktionen die Laplace–Gleichung lösen, so sind quasireguläre Abbildungen Lösungen verschiedener Differentialgleichungsssysteme. Quasikonforme Abbildungen lassen sich in gewisser Weise als konforme Abbildungen bez. einer neuen konformen Struktur auffassen: Jede K–quaisreguläre Abbildungen f induziert via

$$D^T f(x) Df(x) = J(f,x)^{\frac{2}{n}} G(x) \tag{1}$$

eine messbare Abbildung $G : \Omega \to GL(n) \cap \{\text{symm. Matrizen mit Determinante } 1\}$.
Die Matrix G ist die sogenannte *Matrix–Dilatation* von f. Obige Gleichung wird oft auch als *Beltrami–Gleichung* bezeichnet. Das Skalarprodukt $< \xi, \zeta >_G = < G(x)\xi, \zeta >$ definiert dann eine messbare Metrik auf Ω. Betrachten wir die Energie

$$\epsilon[f] = \int_\Omega < G^{-1}(x) Df(x), Df(x) >^{\frac{n}{2}} dx. \tag{2}$$

[4] Beachte: Der Integrand ist weder konvex noch koerziv.

Sie beschreibt somit die Abweichung von der Konformität bez. der neuen Metrik. Wir suchen absolute Minima in $W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ unter Randbedingungen (die sogenannten *Gleichgewichtslösungen*).
Aus der Ungleichung von Hadamard folgt $\epsilon[f] \geq n \cdot \int J(f,x)dx$. Gleichheit gilt genau dann, wenn f die Beltrami–Gleichungen (1) erfüllt. Quasireguläre Abbildungen sind also die absoluten Minima von (2) unter der Bedingung $\int J(f,x)dx = c$, c eine gegebene Zahl.
Das Volumenintegral hängt nur von den Randwerten ab (wende den Satz von Stokes auf die exakte Differentialform $J = d(f^1 df^2 \wedge \cdots \wedge df^n$ an, f^i seien die Koordinatenfunktionen); deshalb können wir zum Auffinden von Minimas unter diesen Randbedingungen die Euler–Lagrange–Gleichungen betrachten:

$$\begin{aligned} div\ \mathcal{A}(x, Df) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} A^{ij}(x, Df) = 0 \\ \mathcal{A}(x, L) &= < G^{-1}(x)L, L >^{\frac{n-2}{2}} G^{-1}(x)L. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die klassische Euler–Lagrange–Gleichung für Kurvenintegrale verallgemeinert auf Raumintegrale $\int_\Omega F(x, \nabla u)dx$. [5] Für Details siehe [D3, 3.4.2], [HKM, 5.18].
Für absolute Minima entkoppeln sich diese Gleichungen ([Re4]): jede der Koordinatenfunktionen $f^i, \dots f^n$ erfüllt die sogenannte *A–harmonische* Gleichung

$$divA(x, \nabla u) = 0$$

Bei 1-quasiregulären Abbildungen (d.h. $K_f = 1$ und $G(x) = Id$) reduziert sich diese Gleichung auf $div(|\nabla u|^{n-2}\nabla u) = 0$; ein Spezialfall einer *p-harmonischen* Gleichung

$$div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \qquad 1 < p < \infty$$

Es würde viel zu weit führen, die Beweise für diesen Abschnitt zu reproduzieren. Im nächsten Abschnitt wollen wir aber immerhin die Unterhalbstetigkeit eines konkreten Funktionals beweisen.

3.3 Der Grenzwertsatz (Halbstetigkeit der Dilatation)

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir bereits zum zentralen Theorem in diesem Kapitel, nämlich dem Grenzwertsatz für Abbildungen mit integrierbarer Dilatation. Dieser Satz lässt sich auch etwas anders interpretieren; er besagt im wesentlichen, dass die Dilatation schwach unterhalbstetig ist.
Als Motivation betrachten wir zuerst den einfacheren Fall von quasiregulären Abbildungen:
Betrachte eine Folge von quasiregulären Abbildungen $f_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ (Ω ein beschränktes Gebiet), die in $W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ schwach gegen eine Abbildung $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ konvergiere. Es gelte

$$||Df_j(x)||^n \leq \mathcal{K}^{n-1} J(x, f_j) \qquad \forall j \in \mathbb{N} \tag{3}$$

[5] Für ein Integral $\int_a^b F(t, c, \nabla u(t))dt$ lauten diese Gleichungen bekanntlich

$$D_1F - \frac{d}{dt}D_2F = 0 = -\frac{d}{dt}D_2F.$$

Für jede nicht-negative Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt nach dem Lemma von Fatou

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(x)||Df(x)||^n dx &\leq \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi(x)||Df_j(x)||^n dx \\
&\leq \mathcal{K}^{n-1} \lim_{j\to\infty} \int_\Omega \varphi(x) J(x, f_j) dx \\
&= \mathcal{K}^{n-1} \int_\Omega \varphi(x) J(x, f) dx
\end{aligned}$$

Darum erhält man (da φ beliebig gewählt werden kann) die punktweise Ungleichung

$$||Df(x)||^n \leq \mathcal{K}^{n-1} J(x, f) \qquad \text{f.ü.} \tag{4}$$

Insbesondere ist die Grenzfunktion f auch quasiregulär ([I1]).
Die Ungleichungen (3) und (4) zeigen, dass die Dilatation auf unserem Funktionenraum (schwach) unterhalbstetig ist. Die Frage liegt nun auf der Hand, ob ein solches Resultat auch für allgemeinere Abbildungen gilt. In der Tat wurde von T. Iwaniec das folgende Theorem für Abbildungen mit integrierbarer Dilatation bewiesen ([I1]):

Theorem 3.4 *(Grenzwertsatz)*
Die Abbildungen $f_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$, Ω beschränkt, seien Abbildungen mit integrierbarer Dilatation, d.h.

$$||Df_j(x)||^n \leq \mathcal{K}_j^{n-1}(x) J(x, f_j) \qquad \forall j \mathbb{N}$$

mit $\mathcal{K}_j \in L^1(\Omega)$. Die Folge (f_j) konvergiere schwach gegen $f \in W^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ und $\mathcal{K}_j \rightharpoonup K$ in $L^1(\Omega)$. Dann hat f eine integrierbare Dilatation und es gilt

$$||Df(x)||^n \leq \mathcal{K}^{n-1}(x) J(x, f) \qquad \textit{f.ü.}$$

Beachte: Dieser Satz gilt nur für die Dilatation $\mathcal{K}$ und *nicht* für die lineare Dilatation. Iwaniec hat seine Vermutung, dass auch die lineare Dilatation unterhalbstetig ist, durch ein Beispiel selber widerlegt. Im Falle von symplektischen Abbildungen (d.h. wenn wir Df als symplektisch vorausssetzen; vgl. dazu Kapitel 4) ist die lineare Dilatation allerdings auch halbstetig. Dies folgt aus folgendem

Lemma 3.5 *Für symplektische Abbildungen mit Dilatation $\mathcal{K}$ und linearer Dilatation H gilt*

$$H(x, f) = \mathcal{K}(x, f)^{\frac{2(n-1)}{n}}$$

A priori hat man ja nur die Ungleichungen

$$\mathcal{K}(x, f) \leq H(x, f) \leq \mathcal{K}^{n-1}(x, f).$$

Beweis (Lemma): Zerlege Df mit der Cartan–Zerlegung $Df = U_1 A U_2$ mit Matrizen $U_{1,2} \in U(n) = O(2n) \cap Sp(2n, \mathbb{R})$ und

$$A = \begin{pmatrix} e^{t_1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & e^{t_m} & & & \\ & & & e^{-t_1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & e^{-t_m} \end{pmatrix}, \qquad m = \frac{n}{2}$$

Fixieren wir ein x und nehmen wir $t_1 = \max_j\{t_j\}$ an, so folgt:

$$\begin{aligned}
\max_{||h||=1} ||Df(x)h|| &= \max_{||h||=1} ||A(x)h|| = \max_j e^{t_j} =: \lambda \\
\min_{||h||=1} ||Df(x)h|| &= \min_{||h||=1} ||A(x)h|| = \min_j e^{t_j} =: \lambda^{-1}
\end{aligned}$$

und damit

$$\left.\begin{aligned}
H(f,x) &= \frac{\lambda}{\lambda^{-1}} = \lambda^2 \\
\mathcal{K}(f,x) &= ||Df(x)||^{\frac{n}{n-1}} = \lambda^{\frac{n}{n-1}}
\end{aligned}\right\} H(f,x) = \mathcal{K}^{\frac{2(n-1)}{n}}$$

$\square$

Der Beweis des Theorems beruht auf der Beobachtung, dass die Funktion

$$\begin{aligned}
W : \{X \in M(n,\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n\times n} : detX > 0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\
X &\mapsto ||X||^{\frac{n}{n-1}}(detX)^{\frac{1}{1-n}}
\end{aligned}$$

polykonvex ist:

$W(X) = \mathcal{F}(t,X) = ||X||^{\frac{n}{n-1}}(t)^{\frac{1}{1-n}} \qquad t = detX$

$\mathcal{F}$ ist konvex in $(t,X) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^{n\times n}$

Der Beweis zeigt die Halbstetigkeit direkt, ohne von den Sätzen im zweiten Kapitel Gebrauch zu machen.

Beweis (1. Teil)

Im folgenden Beweis benützen wird die folgenden Annahmen und Notationen:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei eine beschränkte offene Menge.
$||\cdot||$ bedeutet stets die Operatornorm einer Matrix.
$<,>$ bezeichnet das Standardskalarprodukt.

Die Funktionen $f_j \in W^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^n)$ erfüllen $||Df_j(x)||^n \leq \mathcal{K}_j(x)^{n-1}J(x,f_j)$ und die Folge f_j konvergiere schwach gegen $f \in W^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Die Folge $\mathcal{K}_j$ konvergiere schwach gegen $\mathcal{K}$ in $L^1(\Omega)$.
Ohne Beweis verwenden wir den folgenden Satz:

Satz 3.6 *([I1, Prop. 2.4])*
Die Folge (f_j) orientierungstreuer Abbildungen konvergiere schwach gegen f in $W^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega \varphi(x)J(x,f_j)dx = \int_\Omega \varphi(x)J(x,f)dx$$

für jede Testfunktion $\varphi \in L^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger.

Diese Aussage selbst ist erstaunlich, sind doch Produkte schwach konvergenter Folgen im allgemeinen nicht mehr schwach konvergent. Allgemeine Sätze über schwache Stetigkeit von Keilprodukten von Differentialformen findet man zum Beispiel in [IL].

Der eigentliche Beweis besteht aus vier Schritten:

- Die Funktion $g : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $(a,b) \mapsto a^{\frac{n}{n-1}} \cdot b^{\frac{-1}{n-1}} = \frac{a^n}{b}^{\frac{1}{n-1}}$ ist konvex:
Für eine stetige Funktion g genügt es $g(\frac{1}{2}(a_1,b_1) + \frac{1}{2}(a_2,b_2)) \leq \frac{1}{2}g(a_1,b_1) + \frac{1}{2}g(a_2,b_2)$ zu zeigen ($\lambda = 1/2$, siehe [B]):

$$\begin{aligned} g\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) &= \left(\frac{(a_1/2 + a_2/2)^n}{b_1/2 + b_2/2}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a_1+a_2)^{\frac{n}{n-1}}}{(b_1+b_2)^{\frac{1}{n-1}}} \\ &\leq \frac{a_1^{\frac{n}{n-1}} + a_2^{\frac{n}{n-1}}}{(b_1+b_2)^{\frac{1}{n-1}}} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a_1^{\frac{n}{n-1}}}{b_1^{\frac{1}{n-1}}} + \frac{a_2^{\frac{n}{n-1}}}{b_2^{\frac{1}{n-1}}}\right) \\ &= \frac{1}{2}g(a_1,b_1) + \frac{1}{2}g(a_2,b_2). \end{aligned}$$

Man kann auch direkt die Hesse–Matrix von g berechnen.

W ist also *polykonvex*.

- Eine stetig differenzierbare Funktion g ist genau dann konvex, wenn gilt ([D1, 1.4.2]):

$$g(a,b) - g(A,B) \leq \left\langle g'(a,b), \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Für unser g ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a^n}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}} - \left(\frac{A^n}{B}\right)^{\frac{1}{n-1}} &\leq \left\langle \begin{pmatrix} a - A \\ b - B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}} \\ -\frac{1}{n-1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}} \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot (B-b) + \frac{n}{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot (a-A). \end{aligned}$$

- Schränke x auf die Menge $E := \{x : ||Df(x)|| \neq 0\}$ ein und setze

$$\begin{aligned} a &:= ||Df(x)|| & b &:= J(f,x) + \varepsilon||Df(x)|| \\ A &:= ||Df_j(x)|| & B &:= J(f_j,x) + \varepsilon||Df_j(x)|| \end{aligned}$$

mit einem hinreichnend kleinen $\varepsilon > 0$. Auf der Menge E gilt fast überall

$$\begin{aligned} \left(\frac{||Df(x)||^n}{\varepsilon||Df(x)|| + J(x,f)}\right)^{\frac{1}{n-1}} &\leq \mathcal{K}_j + \tfrac{1}{n-1}\left(\tfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot (J(f_j,x) - J(f,x)) + \\ &\quad + \tfrac{n}{n-1}\left(\tfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n-1}}(||Df(x)|| - ||Df_j(x)||). \end{aligned} \tag{5}$$

Eine Bemerkung zu dieser Formel ist angebracht: $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ ist auf E global durch die Konstante $\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{n-1}}$ beschränkt, also ist der zweite Term rechts integrierbar und konvergiert schwach gegen 0 in L^1.

- Multipliziere (5) mit einer nicht-negativen Testfunktion φ aus $L_0^\infty(E)$ und integriere über E. Für $j \to \infty$ strebt nach Voraussetzung $\mathcal{K}_j \rightharpoonup \mathcal{K}$ in L^1 , ausgeschrieben

$$\lim_{j\to\infty} \int_E \mathcal{K}_j(x)\varphi(x)dx = \int_E \mathcal{K}(x)\varphi(x)dx.$$

Der Satz 3.6 zeigt uns $J(f_j,\cdot) \rightharpoonup J(f,\cdot)$ was

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} J(f_j,\cdot) \;\rightharpoonup\; \frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} J(f,\cdot)$$

und

$$\lim_{j\to\infty}\int_E \frac{1}{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} \cdot (J(f_j,x)-J(f,x))\varphi(x)dx = 0$$

impliziert.

Mit der noch unbewiesenen Behauptung aus dem zweiten Teil des Beweises

$$\lim_{j\to\infty}\int_E \varphi(x)||Df_j(x)||dx \geq \int_E \varphi(x)||Df(x)||dx$$

folgt

$$\lim_{j\to\infty}\int_E \varphi(x)(||Df(x)||-||Df_j(x)||)dx \leq 0.$$

Durch Streichen des negativen dritten Terms in (5) ergibt sich

$$\int_E \varphi(x)(\cdots)dx \leq \int_E \varphi(x)\mathcal{K}(x)dx.$$

Da φ beliebig war, erhält man mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung das gewünschte Resultat:

$$\begin{aligned}\left(\frac{||Df(x)||^n}{\varepsilon||Df(x)||+J(x,f)}\right)^{\frac{1}{n-1}} &\leq \mathcal{K} \qquad \text{f.ü. in } E\\ ||Df(x)||^n &\leq \mathcal{K}^{n-1}(x)J(f,x)+\varepsilon||Df(x)||\end{aligned}$$

Ausserhalb von E, d.h. für $||Df(x)||=0$, gilt das auch. Mit $\varepsilon\to 0$ ergibt sich das Theorem.
□

Beweis (2. Teil)

Zur Vereinfachung der Notationen verwenden wir hier einige Abkürzungen:

$$\begin{aligned}&F:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R},\quad X\mapsto ||X||\\ &u:=Df\in(L^1(\Omega))^{n\times n}\\ &u_j:=Df_j.\end{aligned}$$

Grundlage des Beweises ist wieder die für stetig differenzierbare Abbildungen $G:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ gültige Ungleichung (vgl. [D1, 1.4.2]):

$$G(A)-G(B) \geq <\nabla G(B), A-B> \qquad \forall A,B\in\mathbb{R}^{n\times n} \tag{6}$$

Leider ist F nicht überall differenzierbar. Als konvexe Funktion ist F fast überall stetig differenzierbar. Die Gültigkeit von (6) fast überall hilft uns aber nicht weiter, da es a priori nicht klar ist, dass u Mengen mit positivem Mass nicht gerade auf eine Nullmenge abbildet, wo (6) falsch ist. Gesucht ist also ein Ersatz für ∇F an den Stellen, wo F nicht differenzierbar ist.

Wir wissen aber aus Abschnitt 1.2.1, dass für konvexe Funktionen F weiterhin

$$F(A) - F(B) \ \geq < h(B), A - B > \tag{7}$$

mit geeignetem $h : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt. Nach Einsetzen von $A = u_j(x)$, $B = u(x)$ haben wir also

$$||u_j(x)|| - ||u(x)|| \ \geq < h(u(x)), u_j(x) - u(x) > \tag{8}$$

Bevor wir den Beweis weiterführen, sollten wir zuerst verifizieren, dass beide Seiten von (8) integrierbar sind. Dies ist kein Problem für die linke Seite, vgl. [SW, Seite 474].
Wir behaupten: Die Abbildung h ist beschränkt, d.h. $||h(x)|| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Wähle zum Beweis einen Richtungsvektor V mit $||V|| = 1$. Wir stellen fest, dass die einseitigen Richtungsableitungen von F existieren (F ist konvex) und nach oben durch 1 beschränkt sind, denn aus der Dreiecksungleichung für die Norm F

$$F(X) - tF(V) \leq F(X + tV) \leq F(X) + tF(V)$$

folgt

$$\lim_{t\to 0+} \left| \frac{F(X+tV) - F(X)}{t} \right| \leq F(V) = ||V|| = 1. \tag{9}$$

Nach Voraussetzung an h gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned} < h(X), V > \ &\leq \ \frac{F(X+tV) - F(X)}{t} && (10) \\ < h(X), -V > \ &= \ - < h(X), V > \\ &\leq \ \frac{F(X-tV) - F(X)}{t} \\ \Longrightarrow < h(X), V > \ &\geq \ \frac{F(X-tV) - F(X)}{t} && (11) \end{aligned}$$

Falls $< h(X), V > \geq \ 0$, so folgt mit (9) und (10): $< h(X), V > \leq \ 1$.
Falls $< h(X), V > \leq \ 0$, so folgt mit (9) und (11): $< h(X), V > \geq \ -1$.
Daraus ergibt sich $||h(X)|| \leq 1$. Geometrisch gesprochen: die Stützebenen an den Graphen von F sind maximal um 45 Grad geneigt.
Weil $h(u(x))$ also beschränkt und $u_j(x) - u(x)$ nach Voraussetzung integrierbar ist, folgt die Integrierbarkeit der rechten Seite von (7).
Wir setzen nun den Beweis fort: Multipliziere (7) mit $\varphi \in L_0^\infty(E)$ und integriere:

$$\int_E \varphi(x)(F(u_j(x) - u(x))dx \geq \int_E \varphi(x) < h(u(x)), u_j(x) - u(x) > dx.$$

$u_j \rightharpoonup u$ impliziert $< h(u(x)), u_j(x) - u(x) > \rightharpoonup 0$ da h beschränkt ist.
Durch Grenzübergang $j \to \infty$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} \int_E \varphi(x)(F(u_j(x) - u(x))dx \ &\geq \ 0 \\ \lim_{j\to\infty} \int_E \varphi(x)F(u_j(x))dx \ &\geq \ \int_E \varphi(x)F(u(x))dx. \end{aligned}$$

Nach Definition des schwachen Limes haben wir also das benötigte Resultat:

$$\lim_{j\to\infty} \int_E \varphi(x)||Df_j(x)||dx \geq \int_E \varphi(x)||Df(x)||dx.$$

□

4 Quasikonforme Abbildungen pseudokonvexer Gebiete

4.1 Pseudokonvexe Gebiete und symplektische Abbildungen

4.1.1 Pseudokonvexe Gebiete

Unsere Studienobjekte für dieses Kapitel sind (strikt) pseudokonvexe Gebiete und symplektische Abbildungen. Die Bedeutung pseudokonvexer Gebiete in der mehrdimensionalen Funktionentheorie beruht (unter anderem) darauf, dass solche Gebiete viele Eigenschaften konvexer Gebiete, speziell von Bällen, noch zu einem gewissen Grade besitzen. Die Klasse pseudokonvexer Gebiete ist ja ausserdem invariant unter Biholomorphismen (im Gegensatz zu konvexen !). Wir sprechen in diesem Kapitel über beschränkte Gebiete in $\mathbb{C}^n$, die wir uns mit verschiedenen Strukturen ausgerüstet denken:

- Mit J bezeichnen wir wieder die Multiplikation mit i in reellen Koordinaten; damit ist eine sogenannte *komplexe Struktur* auf dem Raum $\mathbb{R}^{2n}$ festgelegt (zur Definition siehe [Ko]). Die lineare Abbildung J wirkt auf Vektoren und Differentialformen gemäss:

$$
\begin{aligned}
J\frac{\partial}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial y_j} \qquad\qquad & J dx_j &= -dy_j \\
J\frac{\partial}{\partial y_j} &= -\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad\qquad & J dy_j &= dx_j
\end{aligned}
$$

  Weiter Formeln sind im Anhang zusammengestellt.

- Die wichtigste Struktur für unsere Zwecke ist die *Bergman–Metrik* und eine daraus abgeleitete symplektische Form, die *Kähler–Form*.

- Zusätzlich zur symplektischen Struktur im Innern tragen diese Gebiete auf dem Rand eine sogenannte *Kontaktstruktur*.

Die im folgenden Exposé fehlenden Rechungen sind im Buch von Krantz [K] im Kapitel 3 sehr schön durchgeführt. Viele Informationen über Kähler–Formen und komplexe Strukturen stehen in [Ko]; die Bücher [ABKLR] und [AL] geben Auskunft über Kontaktstrukturen und symplektische Geometrie.

Definition 4.1 *Ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ mit Rand ∂D hat einen C^k–Rand, $k \geq 1$, falls es eine k–mal stetig differenzierbare Funktion ϱ in einer Ungebung U des Randes so gibt, dass*

$$
\begin{aligned}
&i) \qquad \partial D \cap U = \{x \in U : \varrho(z) < 0\} \\
&ii) \qquad \nabla\varrho \neq 0 \text{ auf } \partial D.
\end{aligned}
$$

Gilt ausserdem

$$
\begin{aligned}
&iii) \qquad D = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) < 0\} \\
&iv) \qquad \mathbb{R}^n - \overline{D} = \{x \in \mathbb{R}^n : \varrho(x) > 0
\end{aligned}
$$

so heisst ϱ eine (C^k–) definierende Funktion für D.

Ein Gebiet D hat genau dann eine C^k–definierende Funktion, wenn ∂D eine C^k–Mannigfaltigkeit ist. Die Bedingung $\nabla\varrho \neq 0$ auf ∂D garantiert die Existenz eines nichttrivialen Normalenvektors. Die Notation (D, ϱ) soll verdeutlichen, dass eine definierende Funktion ϱ gewählt worden ist.

Der Tangentialräume $T_P\partial D$ in Punkten P haben ungerade Dimension $2n-1$ und können somit nur reelle und nicht komplexe Vektorräume sein. Sie enthalten aber komplexe Unterräume der reellen Dimension $2n-2$, die wir vorläufig mit $\mathcal{T}_P\partial D$ bezeichnen. Sie sind die maximalen Unterräume, die gegenüber der Multiplikation mit J abgeschlossen sind.
Wir entnehmen dem Buch [K] von Seite 123 die Beziehungen:

$$w \in T_P(\partial D) \quad \Leftrightarrow \quad Re(\sum_j \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(P)w_j) = 0$$

$$w \in \mathcal{T}_P\partial D \quad \Leftrightarrow \quad w \in T_P(\partial D) \text{ und } Jw \in T_P(\partial D)$$

$$Re(\sum_j \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(p)Jw_j) = -Im(\sum_j \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(p)w_j)$$

und folgern damit

$$\mathcal{T}_P\partial D = \{w \in \mathbb{C}^n : \sum_j \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(P)w_j) = 0\}.$$

Wir definieren nun einen Konvexitätsbegriff in Analogie zur üblichen Definition (mit der Hesse–Matrix, siehe Kapitel 1), der aber für die Zwecke der Funktionentheorie besser geeignet ist.

Definition 4.2 *Das Gebiet $D \subset \mathbb{C}^n$ habe einen C^2–Rand und sei durch eine C^2–definierende Funktion ϱ gegeben. Wir sagen, dass ∂D pseudokonvex in einem Punkt $P \in \partial D$ ist, falls*

$$\mathcal{L}_P(w,w) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(P)w_j\overline{w}_k \geq 0 \qquad \forall w \in \mathcal{T}_P\partial D.$$

Der Punkt P heisst streng oder strikt pseudokonvex, falls oben Gleichheit nur für $w = 0$ gilt. Ein Gebiet heisst (streng) pseudokonvex, falls alle Randpunkte (streng) pseudokonvex sind.

Die obige quadratische Form ist die *Levi–Form* des Gebietes; sie ist das komplexe Analogon zur Hesse–Matrix aus der reellen Theorie konvexer Gebiete. Die Levi–Form eines strikt pseudokonvexen Gebietes ist also auf jedem komplexen Tangentialraum positiv definit. Im folgenden werden wir auch die bilineare Form

$$\mathcal{L}_P(v,w) := \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(P)v_j\overline{w}_k \geq 0 \qquad \forall v,w \in \mathcal{T}_P\partial D$$

als Levi–Form bezeichnen.
Folgende Tatsachen nehmen wir zur Kenntnis:

– Die Definition der Pseudokonvexität hängt nicht von der Wahl der definierenden Funktion ab. Allerdings ist die Levi–Form ohne Angabe der definierenden Funktion nur bis auf einen skalaren Faktor bestimmt ([Bo, Seite 163]).

– Konvexe Gebiete sind auch pseudokonvex.

– Ist ∂D streng pseudokonvex in einem Punkt P, so kann eine Umgebung von P in $\overline{D}$ mit einer biholomorphen Abbildungen auf eine (streng) konvexe Menge abgebildet werden.

Abbildung 6

– Pseudokonvexe Gebiete gehen unter Biholomorphismen in ebensolche über. Pseudokonvexität ist sozusagen derjenige Teil der Konvexität, der bei biholomorphen Abbildungen erhalten bleibt.

– Die Levi–Form ist invariant unter Biholomorphismen in folgendem Sinne:

$$\mathcal{L}(f_*X, f_*Y) = (X, Y)$$

4.1.2 Die Kontaktstruktur auf dem Rand

Der komplexe Tangentialraum $\mathcal{T}_P\partial D$ ist eine Hyperebene im reellen Tangentialraum (in jedem Punkt P). Anders gesagt: wir haben eine Distribution von Hyperebenen vor uns. Lokal können wir $\mathcal{T}_P\partial D$ als Kern einer 1–Form beschreiben: Die Differentialform

$$\vartheta = \frac{\partial\varrho - \bar{\partial}\varrho}{i} = -i\left(\sum_j \frac{\partial\rho}{\partial z_j}d\bar{z}_j - \frac{\partial\rho}{\partial\bar{z}_j}dz_j\right) = \sum_j -\frac{\partial\varrho}{\partial y_j}dx_j + \frac{\partial\varrho}{\partial x_j}dy_j = Jd\varrho$$

bestimmt den komplexen Tangentialraum durch

$$\mathcal{T}_P\partial D = \{w \in T_pD : \vartheta(w) = 0\}$$

Der reelle Tangentialraum zerfällt also in den sogenannten „Horizontalraum"

$$H_P\partial D = \mathcal{T}_P\partial D = \{X \in T_P\partial D : d\varrho(X) = 0, \vartheta(X) = 0\}$$

und in eine zusätzliche Richtung T (das „Reeb-Vektorfeld") gegeben durch

$$\begin{aligned} d\varrho(T) &= 0 \qquad \text{d.h. T ist tangential} \\ \vartheta(T) &= 1 \\ d\vartheta(T,X) &= 0 \qquad \forall X : d\varrho(X) = 0 \end{aligned}$$

T wird dadurch eindeutig definiert, da wegen der Beziehung

$$\mathcal{L}(X,Y) = -d\vartheta(X, JY)$$

die 2–Form $d\vartheta$ nichtdegeneriert ist ($\mathcal{L}_{|T_P\partial D}$ ist nach Voraussetzung positiv definit). Der Vektor $N = JT$ ist wegen $d\varrho(N) = d\varrho(JT) = Jd\varrho(T) = \vartheta(T) = 1$ transversal zu ∂D.
Eine (glatte) Mannigfaltigkeit M ungerader Dimension mit einer Distribution ξ von Hyperebenen, wie wir sie oben angetroffen haben: $\xi = \{X \in TM : \alpha(X) = 0\}$ mit einer nichtdegenerierten 1–Form α heisst *Kontaktmannigfaltigkeit.* Die Distribution ξ ist die durch die *Kontaktform* α gegebene *Kontaktstruktur*; der Kern der Kontaktform wird allgemein *Horizontalraum* genannt ([ABKLR]). Eine differenzierbare Abbildung $f : (M, \alpha_1) \to (N, \alpha_2)$ zwischen Kontaktmannigfaltigkeiten ist eine *Kontaktabbildung*, wenn sie die Horizontalräume aufeinander abbildet; d.h. wenn

$$f^*\alpha_2 = \lambda \cdot \alpha_1 \qquad \lambda \neq 0$$

gilt. Beispiele dafür in unserer Situation sind holomorphe Abbildungen, wie eine kleine Rechnung zeigt. Wir halten also fest: Streng pseudokonvexe Gebiete tragen auf ihrem Rand in kanonischer Weise eine Kontaktstruktur.

4.1.3 Die symplektische Struktur

Die Resultate in diesem Abschnitt gelten für beliebige beschränkte Gebiete D ; die Pseudokonvexität kommt hier nicht ins Spiel.
Die *Bergman-Metrik* auf D ist die durch

$$\begin{aligned} h &:= \sum_{i,j} h_{i,j} dz_j d\bar{z}_j \\ h_{ij} &:= \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \log K(z,z) \end{aligned}$$

definierte hermitesche Metrik. Dabei ist K der *Bergman-Kern* (siehe Kapitel 1). Die Bergman-Metrik ist eine Verallgemeinerung der Poincaré–Metrik auf der Kreisscheibe; sie ist wie diese auch biholomorph invariant (Biholomorphe Abbildungen sind Isometrien, siehe [K,1.4.15]).
Für festes z gilt $h_{ij} = \overline{h_{ji}}$: die Bergman–Metrik ist an jeder Stelle ein hermitesches Skalarprodukt. Sie ist also keine Riemannsche Metrik (da sie nicht reellwertig ist); hingegen ist $g := \operatorname{Re} h$ eine solche. Die reelle 2–Form $\Omega = i\partial\bar{\partial} \log K = -\frac{1}{2} dJd \log K$ stellt den Imaginärteil von h dar: $2h = g - i\Omega$. Der Faktor 2 stammt vom kanonischen Isomorphismus

$$\{\text{antisymm. Bilinearformen über V}\} \cong \Lambda^2(V^*)$$

der durch $\xi \wedge \eta \mapsto ((x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\xi(x)\eta(y) - \xi(y)\eta(x)))$ gegeben ist.
Die Form Ω ist geschlossen ($d\Omega = 0$) und nichtdegeneriert: wegen $g(X,Y) = \Omega(X, JY)$ folgt dies aus der Nichtdegeneriertheit von g. Somit ist Ω eine *symplektische* Form.
Die Bergman–Metrik ist alternativ durch

$$g(X,Y) = \Omega(X, JY) \qquad X, Y \in TD$$

gegeben und besitzt die Eigenschaft der J–Invarianz (Multiplikation mit i ist eine Isometrie für h). Solche Riemannsche Metriken werden als *Hermitesche* Metriken bezeichnet. Allgemein heisst eine Hermitesche Metrik, deren zugehörige Form Ω geschlossen ist, eine *Kähler–Metrik* mit *Kähler–Form* Ω.
Im folgenden verstehen wir unter *symplektischen* Diffeomorphismen (*Symplektomorphismen*) solche, die die Kähler–Form respektieren:

$$f : (D, \Omega_D) \longrightarrow (G, \Omega_G), \qquad f^*\Omega_G = \Omega_D.$$

Eine Abbildung f ist genau dann symplektisch, wenn ihre Ableitungsmatrix f_* symplektisch ist. Hierbei spielt die verwendete symplektische Form Ω keine Rolle, denn nach einem Satz von Darboux gibt es immer lokale Koordianten, in denen Ω zur Standardform ω_0 wird ([ABKLR]). Die Einschränkung [6] einer symplektischen Abbildung auf ∂D ist eine Kontaktabbildung (Prop. 1 in [KR1]). Das gilt nur, weil die symplektische und die Kontakstruktur in unserem Fall eng miteinander verknüpft sind. Biholomorphe Abbildungen sind auch symplektisch:

$$\begin{aligned} f^*\Omega_G(X,Y) &= \Omega_G(f_*X, f_*Y) = -g_G(f_*X, Jf_*Y) = -g_G(f_*X, f_*JY) \\ &= -g_D(X, JY) = \Omega_D(X,Y) \end{aligned}$$

4.1.4 Zur Invarianz der Levi-Form

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Levi-Form invariant unter biholomorphen Abbildungen. Eine auf den ersten Blick vernünftige Fragestellung lautet nun: Bleibt sie auch unter symplektischen Abbildungen invariant ? Oder allenfalls unter symplektischen Abbildungen , die auf dem Rand des Gebietes kontakt sind ? Wir beschränken uns in den folgenden Überlegungen auf Ellipsoide (im reellen Sinn). Sie sind einerseits pseudokonvex (sie sind ja sogar konvex), andererseits haben sie den Vorteil, dass man sie genau dann biholomorph (und mittelpunktserhaltend) auf die Kugel abbilden kann, wenn man dies bereits mit einer $\mathbb{C}$–linearen Abbildung tun kann ([JP, 3.5.7]). Wir dürfen also unsere Fragestellung ohne grossen Verlust von Allgemeinheit enger fassen:
Lässt sich bei Ellipsoiden anhand der Levi-Form entscheiden, ob sie sich durch eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung auf einen Ball abbilden lassen ?
Das folgende Beispiel beantwortet diese Fragen negativ. Es zeigt eine symplektische Abbildung (bez. der Standardstruktur ω_0), die die Levi-Form invariant lässt, aber weder biholomorph noch kontakt ist. Es zeigt auch, dass sich im allgemeinen symplektische Abbildungen nicht als Kontaktabbildungen auf den Rand fortsetzen.
Beispiel: Betrachte die lineare Abbildung $A : \mathbb{C}^2 \sim \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, definiert durch

$$(z_1, z_2) \sim \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + \sqrt{2}y_1 \\ x_2 \\ x_2 + \sqrt{2}y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & \sqrt{2} \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung bildet die Sphäre $S^3 = \{z : \varrho(z) = ||z||^2 - 1 < 0\}$ auf ein Ellipsoid ab und ist wegen $A^TJA = J$ symplektisch. Sie ist aber keine Kontaktabbildung: Wir zeigen dazu die Existenz eines horizontalen Vektors $X \in HS^3$ dessen Bild nicht in einem horizontalen Raum liegt, weil sich JAX nicht in der Form

$$JAX = \alpha AX + \beta AJX$$

mit reellen α und β schreiben lässt. Die Horizontalräume bei der Sphäre werden im Beweis von Satz 4.3 ausgerechnet. Wähle z.B. den Punkt $p = (\sqrt{2}/2, 0, 0, \sqrt{2}/2) \in S^3$. Dann ist

$$\begin{aligned} X &= X_p = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \in H_pS^3 \\ AX &= (1, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0) \qquad AJX = (-\sqrt{2}/2, 0, 1, \sqrt{2}/2) \\ JAX &= (-\sqrt{2}/2, 1, 0, \sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

[6] Dazu muss die Abbildung auch in einer Umgebung des Randes noch definiert und glatt sein.

Die Levi–Form des Ellipsoids (E, ϱ') mit der definierenden Funktion
$\varrho' = \varrho \circ A^{-1} = (x_1 - \sqrt{2}y_1)^2 + y_1^2 + (x_2 - \sqrt{2}y_2)^2 + y_2^2$ bleibt unverändert: $\mathcal{L}_E = \mathcal{L}_{S^3} = 2 \cdot Id$. Zwischenresultate dieser Rechnung sind

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial z_1} = x_1 - \sqrt{2}y_1 + i\sqrt{2}x_1 - 3iy_1 \qquad \frac{\partial \varrho'}{\partial z_2} = x_2 - \sqrt{2}y_2 + i\sqrt{2}x_2 - 3iy_2$$

Das Beispiel lässt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern.
Um obiges Beispiel auszumerzen, könnte man zusätzlich fordern, dass A auf dem Rand noch kontakt sein soll; wir befinden uns aber dann in einer trivialen Situation:

Satz 4.3 *Lineare Kontaktabbildungen* $A : (S^3, \varrho(z) = ||z|| - 1) \to (E, \varrho \circ A^{-1})$ *sind* $\mathbb{C}$*–linear oder* $\mathbb{C}$*–antilinear.*

Beweis: Ist A kontakt, so gilt an jeder Stelle $p \in S^n$:

$$JAv = \alpha Av + \beta AJv \qquad \forall v \in H_pS^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{12}$$

Die komplexe Struktur J ist in den reellen Koordinaten $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ durch eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Hinreichend für (12) ist die Erfüllung der Matrix–Gleichung

$$JA = \alpha A + \beta AJ \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{13}$$

Diese Gleichung ist auch notwendig, denn jeder Vektor v tritt als Tangentialvektor in einem Punkt p auf (identifiziere dabei Tangentialvektoren mit verschiedenen Fusspunkten): Die definierende Funktion führt zu

$$d\varrho = \sum x_i dx_i + y_i dy_i \qquad Jd\varrho = \sum y_i dx_i - x_i dy_i.$$

Rechne den Horizontalraum $H_pS^n = \{v : d\varrho(v) = 0 = Jd\varrho(p)v\}$ explizit aus (mit Koordinaten $p = (p_1, q_1, \dots)$, $v = (v_1, w_1, \dots)$):

$$\begin{aligned} \ker d\varrho(p) &= \{v : \textstyle\sum p_i v_i + q_i w_i = 0\} = \{v : v \perp p\} \\ \ker Jd\varrho(p) &= \{v : \textstyle\sum q_i v_i - p_i w_i = 0\} = \{v : v \perp Jp\} \end{aligned}$$

Somit ist $H_pS^n = \{v : v \perp p, v \perp Jp\}$. Zu gegebenem v finden wir ein p, so dass $v \in H_pS^n$: Ergänze $\mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}Jv$ zu einem $(n-1)$–dimensionalen J–invarianten Unterraum U von $\mathbb{R}^{n+1}$. Zerlege $\mathbb{R}^{n+1} = U \oplus W$ mit $U \perp W$ und wähle ein $p \in W$ mit $||p|| = 1$. Dann ist $v \in H_pS^n$, denn mit U ist auch W J–invariant.
Zerlege jetzt A in einen $\mathbb{C}$–linearen Teil A^h und eine $\mathbb{C}$–antlinearen Teil A^a: $A = A^h + A^a$. Diese Zerlegung ist eindeutig. Mit (13) erhält man

$$\begin{aligned} JA = \alpha A + \beta AJ &= \alpha(A^h + A^a) + \beta((A^h + A^a)J) \\ &= \alpha(A^h + A^a) + \beta(JA^h - JA^a) = JA = JA^h + JA^a \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung haben wir

$$\begin{aligned} JA^h(1 - \beta) &= \alpha A^h \\ JA^a(1 + \beta) &= \alpha A^a \end{aligned}$$

Ist $A^h \neq 0$, so muss $\alpha = 0$ sein, sonst wären A und JA lin. abhängig. Dann folgt $\beta = 1$ und $A^h = A$. Analog führt $A^a \neq 0$ zu $\beta = -1$ und $A^a = A$. Somit ist A $\mathbb{C}$–linear oder –antilinear. $\square$

4.2 Symplektisch–quasikonforme Abbildungen

Die Komplexifizierung: Wir wissen bereits, dass biholomorphe Abbildungen Isometrien der Bergman–Metrik sind. Auf allgemeine symplektische Abbildungen trifft dies nicht mehr zu; die entscheidende Beziehung

$$f_* \circ J = J \circ f_*$$

stimmt nicht mehr. Bei Symplektomorphismen $f : D \to G$, $f^*\Omega_G = \Omega_D$ können wir ähnlich wie bei ebenen quasikonformen Abbildungen eine komplexe Dilatation μ definieren und mit ihr messen, wie weit sie von einer Isometrie entfernt ist:
Die bilineare Form Ω lässt sich eindeutig zu einer komplex–bilinearen Form auf dem komplexifizierten Tangentialbündel $TD^{\mathbb{C}} = TD \otimes \mathbb{C}$ fortsetzen. Die Bergman–Metrik g setzt sich eindeutig zu einer J-invarianten Hermiteschen Form (im üblichen Sinne) auf $TD^{\mathbb{C}}$ fort und es gilt:

$$g(X,Y) = \Omega(X, \overline{JX}) = \Omega(X, J\overline{X}) \qquad X, Y \in TD^{\mathbb{C}}$$

Für später definieren wir

$$||Z||^2 = ||Z||_g^2 := g_{\mathbb{C}}(Z,Z)$$

Schliesslich kann die Levi–Form zu einer J-invarianten Hermiteschen Form auf $H\partial D^{\mathbb{C}}$ erweitert werden. Wir haben eine direkte Summen–Zerlegung

$$TD^{\mathbb{C}} = T^{1,0}D \oplus T^{0,1}D$$

in Eigenräume von J (wegen $J^2 = -I$ hat $J_{\mathbb{C}} = J$ Eigenwerte $\pm i$):

$$\begin{aligned} T^{1,0}D &= \{X - iJX : X \in TD\} = \{Z \in TD^{\mathbb{C}} : JZ = iZ\} \\ T^{0,1}D &= \{X + iJX : X \in TD\} = \{Z \in TD^{\mathbb{C}} : JZ = -iZ\} \end{aligned}$$

Diese Zerlegung trifft man bereits bei den Operatoren $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y})$ und $\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})$ an:

Abbildung 7

Die komplexe Dilatation: Für Symplektomorphismen $f^*\Omega_G = \Omega_D$ können wir nun auch eine komplexe Dilatation definieren: Wir wählen eine Basis $\{Z_1, \ldots, Z_n\}$ von $T^{1,0}D$. Das Bild eines Vektors Z_j unter der Tangentialabbildung f_* zerfällt in einen holomorphen und einen antiholomorphen Teil:

$$\begin{aligned} f_*Z_j &= V_j + \overline{W_j} \qquad V_j, W_j \in T^{1,0}G \\ V_j &= \sum_{k=1}^n p_{kj} Z'_k; \qquad P = (p_{kj}) \\ \overline{W_j} &= \sum_{k=1}^n q_{kj} \overline{Z'_k}; \qquad Q = (q_{kj}) \end{aligned}$$

mit einer Basis $\{Z'_1, \ldots, Z'_n\}$ von $T^{1,0}G$. Die Vektoren $V_1, \ldots, V_n$ bilden eine Basis von $T^{1,0}G$: andernfalls gäbe es ein $Z \in T^{1,0}D$ mit $f_*Z = 0 + \overline{W} \in T^{1,0}G$ und es würde sich der Widerspruch

$$\begin{aligned} 0 < g_{\mathbb{C}}(W, W) &= \Omega_G(W, J\overline{W}) = -i \cdot \Omega_G(W, \overline{W}) \\ &= -i \cdot \Omega_D(\overline{Z}, Z) = -g_{\mathbb{C}}(Z, Z) < 0 \end{aligned}$$

ergeben. Es gibt also eine lineare Abbildung $\mu : T^{1,0}G \to T^{1,0}G$ mit

$$W_j = \sum_{k=1}^n \mu_{kj} V_j \qquad \mu = (\mu_{kj}) = P^{-1}Q. \tag{14}$$

Wir nennen μ die *komplexe Dilatation* von f. Vergleiche (14) mit der Beltrami–Gleichung im ersten Kapitel ! Eine äquivalente Definition von μ findet sich in [KR1,3].
Einige Eigenschaften von μ wollen wir herleiten:

- μ ist komplex–antilinear: $f_*iZ = i(V + \overline{W}) = iV + \overline{(-i)\mu V}$
  (beachte: f_* wurde $\mathbb{C}$–linear fortgesetzt: $f_*iZ = if_*Z$ aber $f_*JZ \neq Jf_*Z$)
- μ ist symmetrisch (was $g(Z, \mu Z') = g(Z', \mu Z)$ impliziert):
  Sei $Z = \sum \beta_j V_j$, $\mu Z = \sum \overline{\beta_j} W_j$, $Z' = \sum \gamma_j V_j$, $\mu Z' = \sum \overline{\gamma_j} W_j$. Es gilt
  $g(Z, \mu Z') = \sum_j \beta_j \sum_i \overline{\overline{\gamma_i}} g(V_j, W_i) = \sum_j \gamma_j \sum_i \overline{\overline{\beta_i}} g(V_j, W_i) = g(Z', \mu Z)$ da g hermitesch ist.
- Die Norm von μ als lineare Abbildung ist kleiner als 1:
  Die komplexifizierte Tangentialabbildung f_* lässt sich in den Basen $\{Z_j, \overline{Z_j}\}$ als Matrix $\begin{pmatrix} P & Q \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{pmatrix}$ ausdrücken. Für diese komplexifizierte, symplektische Matrix ergibt sich die Cartan–Zerlegung zu (siehe auch [KR2,3])

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & \\ & \overline{U_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ \overline{B} & \overline{A} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & \\ & \overline{U_2} \end{pmatrix} \qquad U_1, U_2 \in U(n)$$

$$A = \begin{pmatrix} \cosh t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \cosh t_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sinh t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sinh t_n \end{pmatrix}$$

  Also ist

$$\mu = P^{-1}Q = (U_1 A U_2)^{-1}(U_1 B \overline{U_2}) = U_2^{-1} A^{-1} B \overline{U_2}$$

  und damit folgt

$$||\mu|| = ||A^{-1}B|| = \max_i \frac{\sinh t_i}{\cosh t_i} = \max_i \tanh t_i < 1.$$

  Die Behauptung folgt auch aus Lemma 2. In diesem Stil lässt sich auch ausrechnen, dass f und f^{-1} die gleiche Dilatation haben: $||\mu_f(f(x))|| = ||\mu_{f^{-1}}(x)||$.

Schliesslich können wir definieren, was eine (glatte) symplektisch–quasikonforme Abbildung sein soll:

Definition 4.4 *Eine Diffeomorphismus $f :\to G$ zwischen beschränkten, strikt pseudokonvexen Gebieten heisse symplektisch–quasikonform, falls f symplektisch bez. der Kähler–Form Ω ist und ihre komplexe Dilatation von 1 wegbeschränkt ist:* $||\mu||_\infty < 1$.

Es wird also $f_* \in Sp(2n, \mathbb{R})$ verlangt.
Allgemeiner soll ein Homöomorphismus $f : D \to G$ symplektisch–quasikonform heissen, wenn f fast überall differenzierbar mit symplektischer Ableitungsmatrix ist und μ fast überall von 1 wegbeschränkt ist. Vergleiche diese Definition mit dem Abschnitt über quasikonforme Sobolev–Abbildungen in Kapitel 3.
Die Jacobideterminante einer symplektisch–quasikonformen Abbildung ist fast überall 1. Solche Abbildungen sind deswegen mass- und orientierungstreu, was aber nicht ganz trivial ist ([Re4]).
Das Ziel dieses Abschnittes ist es, folgende Tatsache zu beweisen:

Satz 4.5 *Die Gebiete D und G in $\mathbb{C}^n$ seien streng pseudokonvex und beschränkt. Die glatte Abbildung $f : D \longrightarrow G$ sei symplektisch–quasikonform mit $||\mu||_\infty \leq \kappa < 1$. Dann gilt:*

$$g_G(f_*X, f_*X) \leq \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \cdot g_D(X, X) \quad \forall X \in TD$$

Symplektisch–quasikonforme Abbildungen sind also bi-Lipschitz bezüglich der Bergman–Metrik:

$$\left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa}\right)^2 \cdot g_D(X, X) \leq g_G(f_*X, f_*X) \leq \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \cdot g_D(X, X) \quad \forall X \in TD$$

(wende den Satz auf f und f^{-1} an).
In der Situation vom Satz ist f K–quasikonform mit linearer Dilatation $K = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)$, denn es gilt

$$K^{-1} \cdot ||X||_g \leq ||f_*X||_g \leq K \cdot ||X||_g.$$

4.2.1 Beweis von Satz 4.5

Wir beginnen mit zwei Lemmata:

Lemma 4.6 *Für Vektoren $V, W, Z \in T^{1,0}D$ gilt:*

$$\begin{array}{llll} (i) & ||Z||_g^2 = -i \cdot \Omega(Z, \overline{Z}) & (ii) & \Omega(V, W) = 0 \\ (iii) & \Omega(\overline{V}, \overline{W}) = 0 & (iv) & ||\overline{V}|| = ||V|| \end{array}$$

Beweis. (siehe Proposition IX.1.10 in [Ko]).
(i) $||Z||^2 = \Omega(Z, \overline{JZ}) = \Omega(Z, -i\overline{Z}) = -i \cdot \Omega(Z, \overline{Z})$ wegen der komplexen Bilinearität von Ω.
(ii) Seien V und W durch $V = X - iJX$ und $W = Y - iJY$ gegeben. Einsetzen und Rechnen liefert

$$\Omega(V, W) = \Omega(X, Y) - i \cdot \Omega(JX, Y) - i \cdot \Omega(X, JY) - \Omega(JX, JY).$$

Die J-Invarianz von Ω ergibt mit $J^2 = -Id$:

$$\Omega(V, W) = -i \cdot (\Omega(JX, Y) + \Omega(JX, J^2Y)) = -i \cdot (\Omega(JX, Y) - \Omega(JX, Y)) = 0.$$

(iii) geht wie (ii).
(iv) Wegen $J^2 = -Id$ gilt $\Omega(\overline{Z}, J\overline{\overline{Z}}) = -\Omega(J\overline{Z}, Z) = \Omega(Z, J\overline{Z})$.

Lemma 4.7 *Sei $Z \in T^{1,0}D$ und $f_*Z = V + \overline{W}$ mit $V, W \in T^{1,0}G$. Dann gilt:*

$$||Z||^2 = ||V||^2 - ||W||^2 \tag{15}$$

Beweis: Es gilt $||Z||^2 = -i \cdot \Omega(Z, \overline{Z}) = -i \cdot \Omega(f_*Z, f_*\overline{Z}) = -i \cdot \Omega(f_*Z, \overline{f_*Z})$.
Für die Gleichung $f_*\overline{Z} = \overline{f_*Z}$ wird verwendet, dass die Matrix der komplexifizierten Abbildung f_* die Gestalt $\begin{pmatrix} P & Q \\ \overline{Q} & \overline{P} \end{pmatrix}$ hat (die 2. Zeile ergibt sich wegen $f_*\overline{Z} = V' + \overline{W}'$ mit $V' = W$ und $\overline{W}' = V$). Nun folgt

$$\begin{aligned} ||Z||^2 &= -i \cdot \Omega(V + \overline{W}, \overline{V + \overline{W}}) = -i \cdot (\Omega(V, \overline{V}) + \Omega(\overline{W}, W) + 0 + 0) \\ &= -i \cdot (\Omega(V, \overline{V}) - \Omega(W, \overline{W})) \\ &= ||V||^2 - ||W||^2. \end{aligned}$$

Beweis des Satzes. Vorerst sei $Z \in T^{1,0}D$. Es gilt: $f_*Z = V + \overline{\mu V}$ und $0 \leq ||\mu||_\infty = \kappa < 1$.
Mit (15) folgt:

$$\begin{aligned} ||Z||^2 &= ||V||^2 - ||W||^2 = ||V||^2 - ||\mu V||^2 \geq (1 - ||\mu||_\infty^2) \cdot ||V||^2 \\ &\geq (1 - ||\mu||_\infty)^2 \cdot ||V||^2 = (1 - \kappa)^2 \cdot ||V||^2 \end{aligned} \tag{16}$$

unter Verwendung von

$$||A(p)v|| \leq ||A(p)|| \cdot ||v|| \leq \sup_p ||A(p)|| \cdot ||V||$$

für eine beliebige von p abhängige lineare Abbildung A zwischen normierten Vektorräumen. Die letzte Ungleichung in (16) gilt wegen $0 \leq \kappa \leq 1$. Mit der Abschätzung

$$||f_*Z|| = ||V + \overline{\mu V}|| \leq ||V|| + \sup ||\overline{\mu}|| \cdot ||\overline{V}|| \leq (1 + \kappa) \cdot ||V||$$

und (16) folgt

$$g_G(f_*Z, f_*Z) = ||f_*Z||^2 \leq \frac{||Z||^2}{(1-\kappa)^2} \cdot (1+\kappa)^2 = \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2 \cdot ||Z||^2 = K^2 \cdot ||Z||^2.$$

Damit ist Satz 4.5 für Vektoren Z aus $T^{1,0}D$ bewiesen. Für reelle Vektoren $X \in TD$ kann man z.B. so schliessen:
Die „Reellifizierung“ $\alpha : T^{1,0}D \longrightarrow TD$, $Z = X - iJX \mapsto X = (Z + \overline{Z})/2$
ist $\mathbb{R}$-linear und wegen $f_*\overline{Z} = \overline{f_*Z}$ gilt $\alpha \circ f_* = f_* \circ \alpha$.
Also folgt:

$$\begin{aligned} ||f_*X||^2 &= ||(f_* \circ \alpha)Z||^2 = ||\alpha \circ f_*Z||^2 \\ &\leq ||\alpha||^2 \cdot ||f_*Z||^2 \leq ||\alpha||^2 \cdot K^2 \cdot ||Z||^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot K^2 \cdot 2 \cdot ||X||^2 \\ &= K^2 \cdot ||X||^2. \end{aligned}$$

□

5 Deformationen von pseudokonvexen Gebieten

Wir wollen Familien $\{D_t\}$ von glatten, streng pseudokonvexen Gebieten studieren. Sie sind durch $D_t := \{z : \varrho(z,t) < 0\}$ gegeben und wir konstruieren Abbildungen $\varphi_t : D_0 \to D_t$ als Fluss eines zeitabhängigen Vektorfeldes. Dabei sollte der Fluss symplektisch ($\varphi_t^* \Omega_t = \Omega_0$) oder kontakt sein ($\varphi_t : \partial D_0 \to \partial D_t$ kontakt). Es ist bekannt, wie Vektorfelder aussehen, die solche Kontaktflüsse erzeugen:

Theorem 5.1 *([R, Theorem1]) Die streng pseudokonvexen Gebiete D_t seien durch in t glatt variierende definierende Funktionen ϱ_t definiert. Ist das Vektorfeld u_t auf ∂D_t durch*

$$u_t = pT - \dot{\varrho}N - J \operatorname{grad}_L p - \operatorname{grad}_L \dot{\varrho}$$

gegeben mit einer beliebigen Funktion p und $\dot{\varrho} = \frac{d}{dt}\varrho_t$, so ist der durch u_t erzeugte Fluss $\varphi_t : \partial D_0 \to \partial D_t$ ein Kontaktfluss.

Der horizontale Gradient $\operatorname{grad}_L p$ bez. der Levi–Form ist der Vektor in $H\partial D$, der

$$\mathcal{L}(\operatorname{grad}_L p, X) = Xp \qquad \forall X \in H\partial D$$

erfüllt. Wir können also ausser den definierenden Funktionen ϱ_t noch eine Funktion p wählen. Umgekehrt können wir aus einem gegebenen Fluss die Funktion p bestimmen. Bevor wir ein Beispiel durchrechnen, halten wir einige Beobachtungen fest:

Lemma 5.2 *Gegeben seien ein streng pseudokonvexes Gebiet $D_0 = \{\varrho_0 < 0\}$ und eine glatte Familie streng pseudokonvexer Gebiete $\{D_t : t \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ mit definierenden Funktionen $\varrho_t = \varrho_0 \circ \varphi_t^{-1}$. Der Fluss $\{\varphi_t\}$ sei holomorph (φ_t ist für festes t holomorph). Dann gilt*

1. $H_y \partial D_t = \varphi_{t*} H_x \partial D_0 \qquad y := \varphi_t(x)$
2. $T_y = \varphi_{t*} T_x$ *und* $N_y = \varphi_{t*} N_x$
3. $(\operatorname{grad}_{L_t} f)(y) = \varphi_{t*}(\operatorname{grad}_{L_0}(f \circ \varphi_t)(x))$.

Beweis: Wir stellen zuerst einige Formeln bereit. Bezeichne mit $\vartheta_0 := Jd\varrho_0$, $\vartheta_t := Jd\varrho_t$. Aus $\varrho_t = \varrho_0 \circ \varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}^* \varrho_0$ folgt

$$\begin{aligned} d\varrho_t &= d\varphi_{-t}^* \varrho_0 = \varphi_{-t}^* d\varrho_0 \\ \vartheta_t &= Jd\varrho_t = J\varphi_{-t}^* d\varrho_0 = \varphi_{-t}^* Jd\varrho_0 = \varphi_{-t}^* \vartheta_0. \end{aligned}$$

Da der Fluss als holomorph vorausgesetzt wird, sind J und φ_{-t}^* vertauschbar. Natürlich ist $\vartheta_t = \varphi_{-t}^* \vartheta_0$ gleichwertig zu $\varphi_t^* \vartheta_t = \vartheta_0$.

1. Offensichtlich ist $H_y \partial D_t = \{X \in T\partial D_t : \vartheta_t(X) = 0 = \vartheta_0(\varphi_{t*}^{-1} X)\}$
   gleich $\varphi_{t*} H_x \partial D_0 = \{\varphi_{t*} Y : \vartheta_0(Y) = 0\}$
2. Sei $T = T_x$, $X \in H_x \partial D_0$ und rechne:

$$\begin{aligned} \vartheta_t(\varphi_{t*} T) &= \varphi_{-t}^* \vartheta_0(\varphi_{t*} T) = \vartheta_0(\varphi_{t*}^{-1} \varphi_{t*} T) = \vartheta_0(T) = 1 \\ d\vartheta_t(\varphi_{t*} T, \varphi_{t*} X) &= \varphi_{-t}^* d\vartheta_0(\varphi_{t*} T, \varphi_{t*} X) = d\vartheta_0(T, X) = 0. \end{aligned}$$

   Also ist $T_y = \varphi_{t*} T_x$. Analog für $N_t = JT_t$.

3. Die Behauptung gilt wegen

$$\begin{aligned} L_t(\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}Y) &= -d\vartheta_t(\varphi_{t*}X, J\varphi_{t*}Y) \\ &= -d\vartheta_t(\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}JY) = -d\vartheta_0(X, JY) \\ &= L_0(X, Y) \qquad \forall X, Y \in H\partial D_0 \end{aligned}$$

Mit der Definition des horizontalen Gradienten folgt die Behauptung:

$$\begin{aligned} L_t(\varphi_{t*}(\operatorname{grad}_{L_0}(f \circ \varphi_t)(x)), \varphi_{t*}Y) &= L_0(\operatorname{grad}_{L_0}(f \circ \varphi_t)(x), Y) \\ &= Y(f \circ \varphi_t) = (\varphi_{t*}Y)f \\ &= L_t(\operatorname{grad}_{L_t} f, \varphi_{t*}Y) \qquad \forall Y \in H\partial D_0. \end{aligned}$$

Aus obger Gleichung lässt sich $\operatorname{grad}_{L_t} f = \varphi_{t*}(\operatorname{grad}_{L_0}(f \circ \varphi_t))$ schliessen, denn φ_{t*} ist ein Isomorphismus der beteiligten Horizontalräume und L_t ist nichtdegeneriert.

Ganz allgemein zeigt dieses Lemma, dass die Funktion p auf jeder Flusslinie konstant ist:

Korollar 5.3 *In der Situation von Lemma 5.2 sei*

$$u_0 = a(x)T_0(x) + b(x)N_0(x) + c(x)H_0(x)$$

mit $H_t = -J \operatorname{grad}_L p - \operatorname{grad}_L \dot{\varrho} \in H\partial D_t$. *Dann gilt an der Stelle* $y = \varphi_t(x)$*:*

$$u_t(y) = a(x)T_t(y) + b(x)N_t(y) + c(x)H_t(y)$$

Die Koeffizienten a, b, c *sind also auf jeder Flusslinie konstant.*

Beweis: Verwende $u_t = \varphi_{t*}u_0$ und das Lemma:

$$\begin{aligned} u_t &= \varphi_{t*}(aT_0 + bN_0 + cH_0) \\ &= a\varphi_{t*}T_0 + b\varphi_{t*}N_0 + c\varphi_{t*}H_0 \\ &= aT_t + bN_t + cH_t \end{aligned}$$

Die Gleichung $\varphi_{t*}H_0 = H_t$ verlangt eine Rechtfertigung: Nach dem Lemma ist $\varphi_{t*}(\operatorname{grad}_{L_0}(\dot{\varrho} \circ \varphi_t)) = \operatorname{grad}_{L_t} \dot{\varrho}$; da der Fluss holomorph ist, gilt auch

$$\varphi_{t*}(J \operatorname{grad}_{L_0}(p \circ \varphi_t)(x)) = J\varphi_{t*}(\operatorname{grad}_{L_0}(p \circ \varphi)(x)) = J(\operatorname{grad}_{L_t} p)(y).$$

Abbildung 8

Beispiel: In der Situation vom Lemma sei D_0 die Einheitskugel $B_1(0)$ mit Rand S^3, $\varrho_0(z) = |z|^2-1 = |z_1|^2+|z_2|^2-1$, $\varphi_t(z_1,z_2) = q = (e^t z_1, z_2)$, $\varphi_{t*} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$.
Dann gilt $p \equiv 0$.
Mit dem gewählten $\varrho = \varrho_0$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d\varrho_0 &= 2\sum x_j dx_j + \sum y_j dy_j \\ \vartheta &= -2\sum x_j dy_j + \sum y_j dx_j \\ d\vartheta &= -4\sum dx_j \wedge dy_j \\ L(X,Y) &= 4 < X, Y >_{euklid} . \end{aligned}$$

Der (unnormierte) Normalenvektor ist $\tilde{N} = \sum x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Setze $\tilde{T} = J\tilde{N}$. Normiere:

$$\vartheta(\tilde{T}) = -2(\sum x_i^2 + y_i^2) \Rightarrow T = \frac{1}{2}\sum y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Die Ableitung $\dot{\varrho}(z,t)$ zur Zeit $t=0$ ist wegen $\varrho_t(z) = \varrho_0(\varphi_t^{-1}z) = \varrho_0(e^{-t}z_1, z_2)$ gleich $-2|z_1|^2$. Das Vektorfeld u_0 zur Zeit 0 im Punkt $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in S^3$ können wir aus dem Fluss berechnen: $u_0 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$. Bestimme p durch Projektion von u_0 in Richtung T:

$$< u_0, T >_{euklid} = \frac{1}{2} < x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}, y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} >= 0.$$

Also ist p auf S^3 identisch 0.
Als Test lässt sich durch sorgfältiges Rechnen die Gleichung $u_0 = -\dot{\varrho}N - \operatorname{grad}_L \dot{\varrho}$ verfizieren.
Für $t \neq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} u_t &= e^t (x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}) \\ T_t &= \frac{e^t}{2}(y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_1}) + \frac{1}{2}(y_2 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial y_2}) \\ < u_t, T_t >_{euklid} &= 0. \end{aligned}$$

□

Es ist keineswegs so, dass für holomorphe Flüsse immer $p = 0$ ist: Der Fluss ist holomorph wenn immer $J_t = J$ gilt. Jedes Vektorfeld mit verschwindender Lie–Ableitung von J in Richtung u ($L_u J = 0$) führt auf einen holomorphen Fluss. Die Lie–Ableitung ist im Anhang definiert, siehe auch [Ko, IX.2.11]. Jedes konstante Vektorfeld u erfüllt trivialerweise $L_u J = 0$, denn dies ist eine Bedingung an die partiellen Ableitungen der Koordinaten von u (der Fluss zu einem solchen u besteht aus Translationen).
Mit dem Vektorfeld lässt sich prinzipiell die Quasi–Konformitätskonstante der Kontaktabbildungen [7] bestimmen (Theorem 3 in [R]).
In konkreten Beispielen stösst man allerdings auf sehr unangenehme Ausdrücke, aus denen man noch eine Abschätzung gewinnen sollte. Anstelle einer solchen Rechnung (die schon lange auf ihre Vollendung harrt ...) soll ein entsprechender Satz für symplektische Flüsse formuliert werden:

[7] Wir haben nicht definiert, was quasikonforme Kontaktabbildungen sind; dazu siehe [KR1–3,R].

Theorem 5.4 *Der symplektische Fluss φ_t , $\varphi_t^*\Omega_t = \Omega_0$, zwischen beschränkten Gebieten werde durch das Vektorfeld u erzeugt. Falls*

$$|\Omega_t(X, L_u JX)| \leq c \cdot \Omega_t(X, JX) = c \cdot g_t(X, X) \quad \forall t, X \in TD_t$$

dann ist φ_t symplektisch–quasikonform mit $K = e^{c|t|}$.

Zur Erinnerung: Die bez. der Kähler–Form symplektische Abbildung f ist K-quasikonform falls $||\mu_f|| \leq \kappa < 1$ mit $K = \frac{1+\kappa}{1-\kappa}$. Mit g_t ist die Bergman–Metrik von $D_t = \{\varrho_t = \varrho_0 \circ \varphi_t^{-1} < 0\}$ gemeint. Mit $L_u J$ wird die Lie–Ableitung von J in Richtung des Vektorfeldes u bezeichnet.
Beweis: (siehe [R])
Der Beweisidee ist diesselbe wie für Kontaktflüsse. Der symplektische Fall ist etwas einfacher. Es gilt:

$$\begin{aligned} g_t(\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}X) &= \Omega_t(\varphi_{t*}X, J\varphi_{t*}X) \\ &= \varphi_t^*\Omega_t(X, \varphi_{t*}^{-1}J\varphi_{t*}X) = \Omega_0(X, J_tX) \end{aligned} \tag{17}$$

mit der zurückgezogenen komplexen Struktur $J_t = \varphi_{t*}^{-1}J\varphi_{t*}$. Im weiteren Beweis wird

$$|\frac{d}{dt}(\Omega_0(X, J_tX)| \leq c \cdot \Omega_0(X, J_tX) \tag{18}$$

gezeigt; Integration dieser „Differential–Ungleichung“ ergibt

$$e^{-c|t|} \leq \frac{\Omega_0(X, J_tX)}{\Omega_0(X, JX)} \leq e^{c|t|}$$

und zusammen mit (17)

$$\frac{\max_{g_0(X,X)=1} g_t(\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}X)}{\min_{g_0(X,X)=1} g_t(\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}X)} \leq \frac{K}{K^{-1}} \leq K^2,$$

was der Behauptung entspricht. Wir müssen nun (18) zeigen. Mit der Definition von J_t folgt:

$$\frac{d}{dt}[\Omega_0(X, J_tX)] = \frac{d}{dt}[\varphi_t^*\Omega_t(X, J_tX)] = \frac{d}{dt}[\Omega_t(\varphi_{t*}X, J\varphi_{t*}X)] \tag{19}$$

und Ableiten ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[\Omega_0(X, J_tX)] &= (\frac{d}{dt}\varphi_{t*}\Omega_t)(X, J_tX) + \varphi_t^*\Omega_t(X, \frac{d}{dt}J_tX) \\ &= 0 + \varphi_t^*\Omega_t(X, \frac{d}{dt}J_tX) = \Omega_t(\varphi_{t*}X, \varphi_{t*}\frac{d}{dt}J_tX) \\ &= \Omega_t(\varphi_{t*}X, L_uJ\varphi_{t*}X) \\ |\frac{d}{dt}[\Omega_0(X, J_tX)]| &\leq c \cdot \Omega_t(\varphi_{t*}X, J\varphi_{t*}X) = c \cdot \Omega_0(X, J_tX). \end{aligned}$$

Beim Schritt von der 2. Zeile zur 3. Zeile wird $\frac{d}{dt}J_t = \varphi_{t*}^{-1}L_uJ\varphi_{t*}$ gebraucht; das folgt wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}J_t &= \lim_{s\to 0} \frac{\varphi_{t+s*}^{-1}J\varphi_{t+s*} - \varphi_{t*}^{-1}J\varphi_{t*}}{s} \\ &= \varphi_{t*}^{-1} \lim_{s\to 0} \frac{\psi_{s*}^{-1}J\psi_{s*} - J}{s}\varphi_{t*} \qquad \psi_{s*} := \varphi_{s+t*} \circ \varphi_{t*}^{-1} \\ &= \varphi_{t*}^{-1}L_uJ\varphi_{t*}. \end{aligned}$$

Damit haben wir (18) gezeigt und wir sind fertig. □

A Formelsammlung

Komplexe Ableitungen(Wirtingerkalkül)
Bezeichnungen: $\mathbb{C}^n \ni (z_1, \ldots, z_n) \approx (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \approx (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$.

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} - i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right) \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} + i\frac{\partial f}{\partial y_j}\right)$$

$$dz_j := dx_j + idy_j \qquad d\bar{z}_j := dx_j - idy_j$$

$$\partial := \sum_j \frac{\partial}{\partial z_j} dz^j \qquad \bar{\partial} := \sum_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}^j$$

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

$$J\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \qquad J\frac{\partial}{\partial y_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$Jdz = i \cdot dz \qquad Jd\bar{z} = -i \cdot d\bar{z}$$

$$\partial f = \frac{1}{2}(df - iJdf) \qquad \bar{\partial} f = \frac{1}{2}(df + iJdf)$$

Tensorfelder
Für eine (glatte) Mannigfaltigkeit M definieren wir

$$\begin{aligned} T_s^r(x) &:= \underbrace{T_x(M) \otimes \cdots \otimes T_x(M)}_{r\ kontravariant} \otimes \underbrace{T_x^*(M) \otimes \cdots \otimes T_x^*(M)}_{s\ kovariant} \\ T_s^r(M) &:= \bigcup_{x \in M} T_s^r(x). \end{aligned}$$

Das Bündel $T_s^r(M)$ heisst Tensorfeld vom Typ (r,s).

Typ	Interpretation
(0,0)	reelle Funktionen
(0,1)	1-Differentialformen
(1,0)	Vektorfelder
(1,1)	$Hom(T_x(M)) \cong T_x(M) \otimes T_x^*(M)$

Die Lie–Ableitung
Wieder sei M eine Mannigfaltigkeit, X ein Vektorfeld auf M, $\{\varphi_t\}$ der Fluss von X und T sei ein Tensorfeld vom Typ (r,s). Die *Lie–Ableitung von T in Richtung X* ist definiert durch

$$\begin{aligned} (L_X T)(x) &:= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[(\varphi_{t*}^{-1} T \varphi_{t*})(x) - T(x)\right] \in T_s^r(M) \\ (\varphi_t^* T(x))(X_1, \ldots, X_r, \omega_1, \ldots, \omega_s) &:= T(\varphi_t(x))(d\varphi_t X_1, \ldots, d\varphi_t X_r, (\varphi_t^{-1})^* \omega_1, \ldots, (\varphi_t^{-1})^* \omega_s). \end{aligned}$$

Literatur

[A] L. Ahlfors: Lectures on quasiconformal mappings. Van Nostrand Studies 10, Princeton 1966

[AL] M. Audin, J. Lafontaine: Holomorphic curves in symplectic geometry. Birkhäuser Basel 1994

[ABKLR] B. Aebischer, M. Borer, Ch. Leuenberger, M. Kälin und H.M. Reimann: Symplectic geometry. Birkhäuser Basel 1994

[B] A. Boas: A Primer of real functions, Math. Assoc. of America 1980

[BB] P. Blanchard, E. Brüning: Direkte Methoden der Variationsrechnung. Springer Wien 1982

[BCO] J. M. Ball, J. C. Currie, P. J. Olver: Null Lagrangians, weak continuity and variational problems of arbitrary order. *J. of Funct. An.* **41**(1981), 135–174

[Bo] A. Boggess: CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex. CRC Press Boca Raton 1991

[C] S.S. Chern: Complex manifolds without potential theory. Van Nostrand Math. Studies 15, Princeton 1967

[D1] B. Dacorogna: Introduction au calcul des variations. Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne 1992.

[D2] B. Dacorogna: Weak continuity and weak lower semicontinuity of non-linear functionals. LNM 922, Springer Berlin

[D3] B. Dacorogna: Direct methods in the calculus of variations. Springer 1989

[HKM] J. Heinonen, T. Kilpeläinen und O. Martio: Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Oxford University Press Oxford 1993

[HK] J. Heinonen, P. Koskela: Sobolev Mappings with integrable dilatation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **125**(1993), 81–97

[I1] T. Iwaniec: Geometric function theory and partial differential equations. Vorlesungen in Seillac (Frankreich) vom 27. Mai bis 2. Juni 1995

[I2] T. Iwaniec: L^p Theory of quasiregular mappings. In LNM 1508, Springer Berlin

[IL] T. Iwaniec, A. Lutoborski: Integral estimates for Null Lagrangians. *Arch. Rat. Mech. Anal.* **125**(1993) , 25–97

[JP] M. Jarnicki, P. Pflug: Invariant distances and metrics in complex analysis. De Gruyter Expositions in Mathematics 9, De Gruyter Berlin 1993

[Ko] S. Kobayashi, K. Nomizu: Foundations of differential geometry, Band 2. Interscience 1969

[KR1] A. Korányi und H. M. Reimann: Contact cransformations as limits of symplectomorphisms. *C. R. Acad. Sci. Paris* **318**(1994), 1119–1124

[KR2] A. Korányi und H. M. Reimann: Foundations for the theory for quasiconformal mappings on the Heisenberg group. *Adv. Math.* **3**(1995), 1–87

[KR3] A. Korányi und H. M. Reimann: Quasiconformal mappings on CR manifolds. In: LNM 1422 Springer Berlin

[K] S. G. Krantz: Function theory of several complex variables (2. Auflage). Wadsworth & Brooks Belmont 1992.

[L] K. Leichtweiss: Konvexe Mengen. Springer 1980

[LV] O. Lehto, K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. Springer Grundlehren 126, Berlin 1965

[Mo1] C.B. Morrey: Quasiconvexity and lower semicontinuity of multiple integrals. *Pacific J. of Math.* **2**(1952), 25–53

[Mo2] C.B. Morrey: Multiple integrals in the calculus of variations. Springer Berlin 1960

[R] H. M. Reimann: Quasiconformal mappings and pseudoconvex domains.
Erscheint in: Procedings of the 16^{th} R. Nevanlinna Colloquium 1995

[Re1] Y. G. Reshetnyak: Generalized derivatives and differentiability almost everywhere. *Soviet Math. Dokl.* **7**(1966), No. 5

[Re2] Y. G. Reshetnyak: Space mappings with bounded distortion. *AMS Translations of Math. Monographs* **73**(1989)

[Re3] Y. G. Reshetnyak: Some geometrical properties of functions and mappings with generalized derivatives. *Sib. Math. J.* **7**(1966), No. 4

[Re4] Y. G. Reshetnyak: On extremal mappings with bounded distortion. *Sib. Math. J.* **10**(1969), 1300–1310

[Ro] R. T. Rockafellar: Convex analysis. Princeton University Press 1970

[SW] U. Storch, H. Wiebe: Lehrbuch der Mathematik Band 3.BI Mannheim 1989

[V] J. Väisälä: Lectures on n–dimensional quasiconformal mappings. LNM 229, Springer 1971