

Spektralanalyse

Kap. 8.8 im TJ

- Einführung
 - Joseph Fourier, sein Leben und seine Idee
- Übung: Signale anschauen. Spektralanalyse
- Präsentation Resultate
- Theorie, kleine Übung: Sonogramme
- Beispiele und Anwendungen

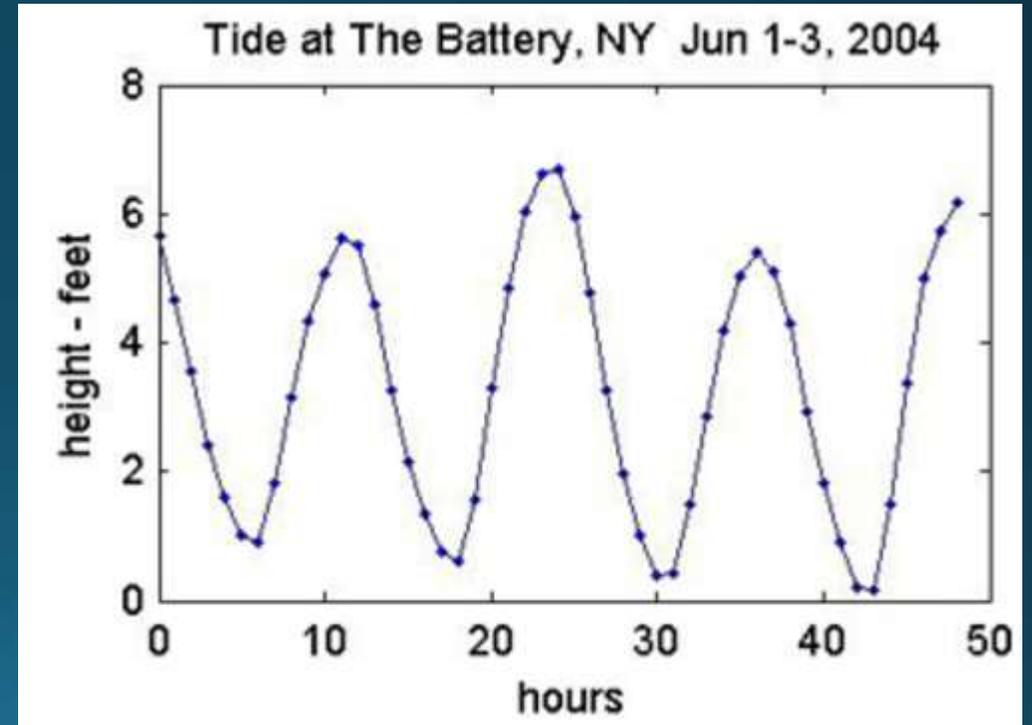
Joseph Fourier 1768-1830



Inspiration: Ebbe und Flut

Ebbe und Flut sind sehr periodisch, aber nicht eine einfache Sinusfunktion und an jeder Küste verschieden

**Schon vor 1800 berechneten
Maschinen die Gezeiten**



Ebbe





Fouriers Idee

■ EINFÜHRUNG

Fällt Licht auf dein Auge oder hörst du einen Ton, so entsteht ein Signal, das man als eine Funktion der Zeit $y(t)$ auffassen kann. Für eine einzige Spektralfarbe oder einen reinen Ton handelt es sich um eine sinusförmige Schwingung mit der Amplitude A und Frequenz f , mathematisch ausgedrückt [**mehr...**]:

$$y(t) = A \sin(\omega * t) \text{ mit } \omega = 2 * \pi * f$$

Ein komplexeres Signal, beispielsweise von einem konstant ausgehaltenen Ton eines Musikinstruments, ist noch immer periodisch, aber nicht mehr sinusförmig. Der ~~berühmte~~ Mathematiker Joseph Fourier (1768-1830) hat aber bewiesen, dass man jede periodische Funktion auch als eine Summe von Sinusschwingungen, als sogenannte **Fourierreihe**, auffassen kann. Er hat damit einen Grundstein von unschätzbarem Wert für den Fortschritt in der modernen Mathematik, Physik und Technik gelegt. Die Aufspaltung eines Signals in seine sinusförmigen Frequenzanteile nennt man **Spektralanalyse**.



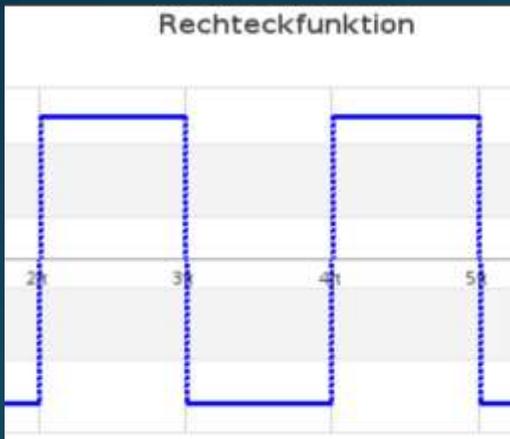
PROGRAMMIERKONZEPTE: *Sinusschwingung, Fourierreihe, Fast Fourier Transform (FFT), Spektrum, Sonogramm*

Spektralanalyse

Fourier-Reihe

These: beliebige *periodische* Funktionen lassen sich als Summe von Sinus- und Cosinusfunktionen auffassen

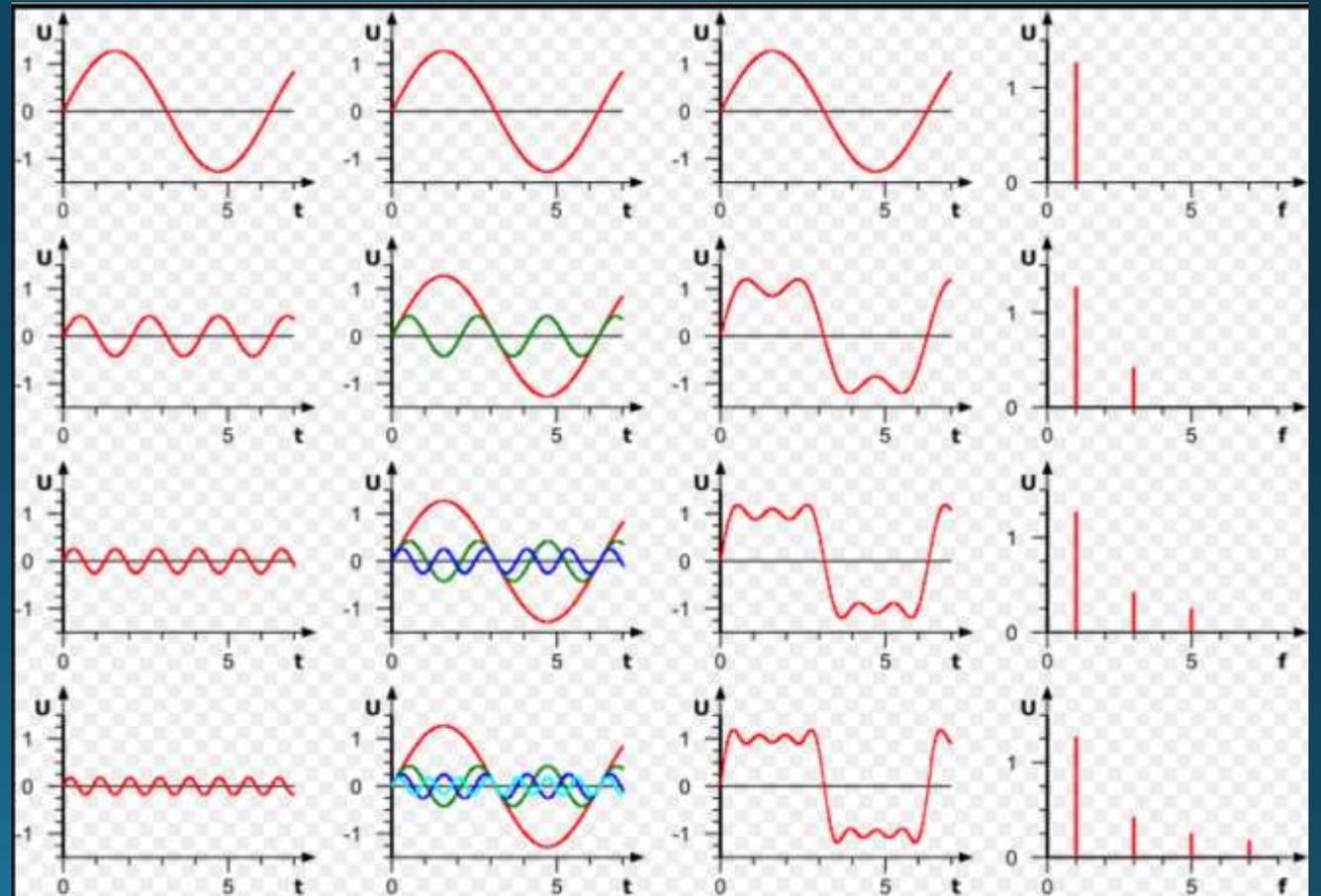
$$f(t) = \frac{4h}{\pi} \left[\sin \omega t + \frac{1}{3} \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \sin 5\omega t + \frac{1}{7} \sin 7\omega t + \dots \right]$$



Analyse

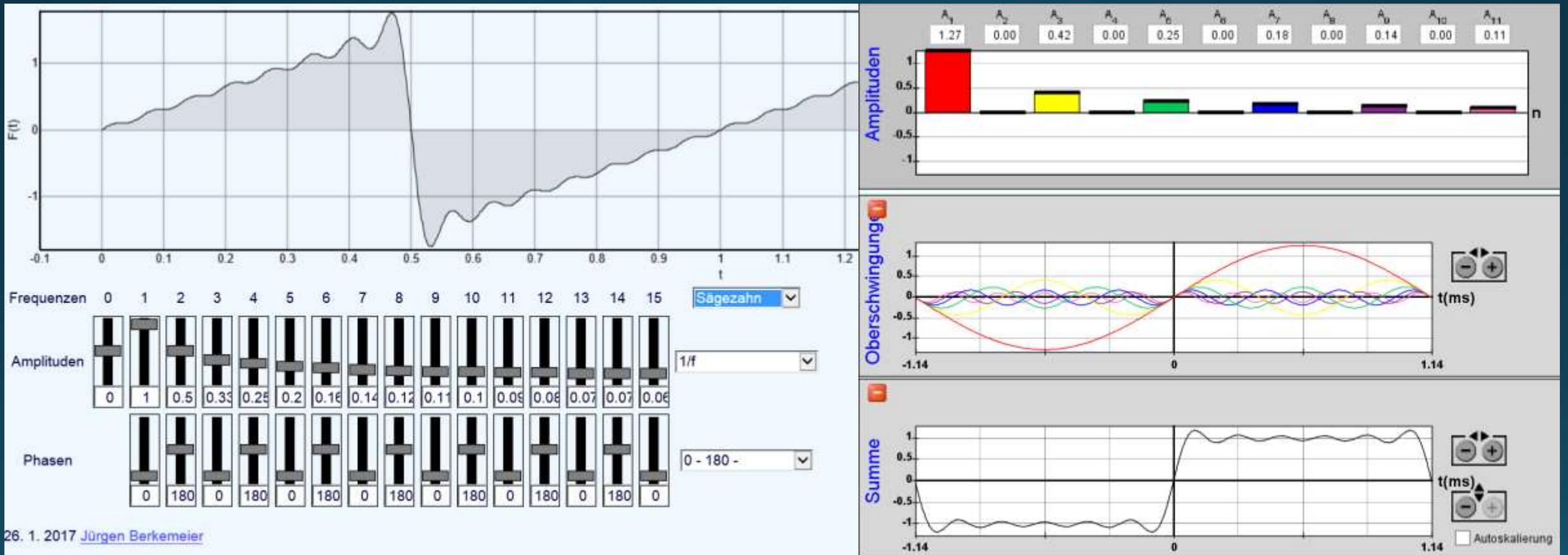


Synthese



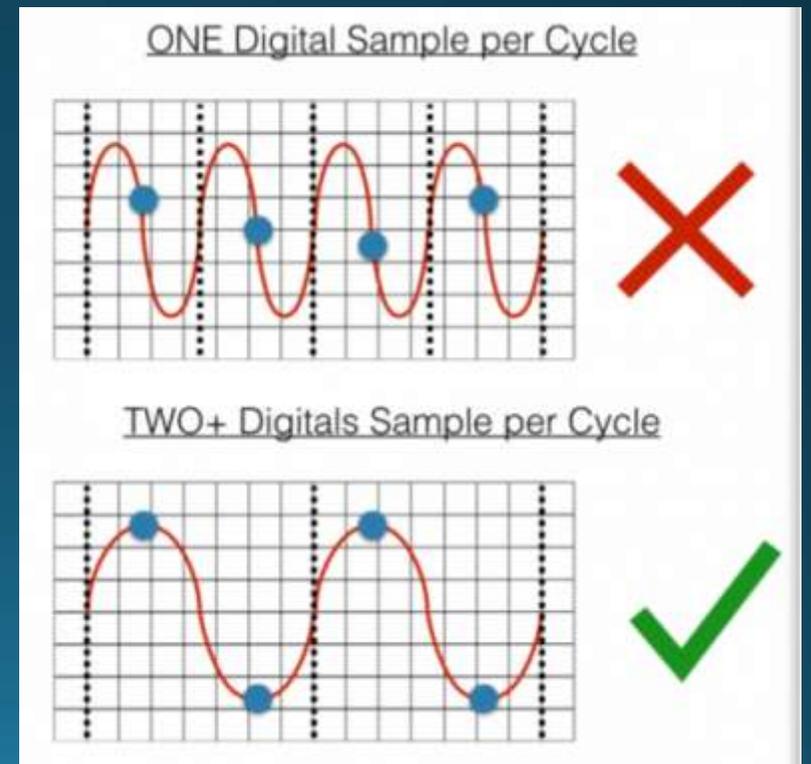
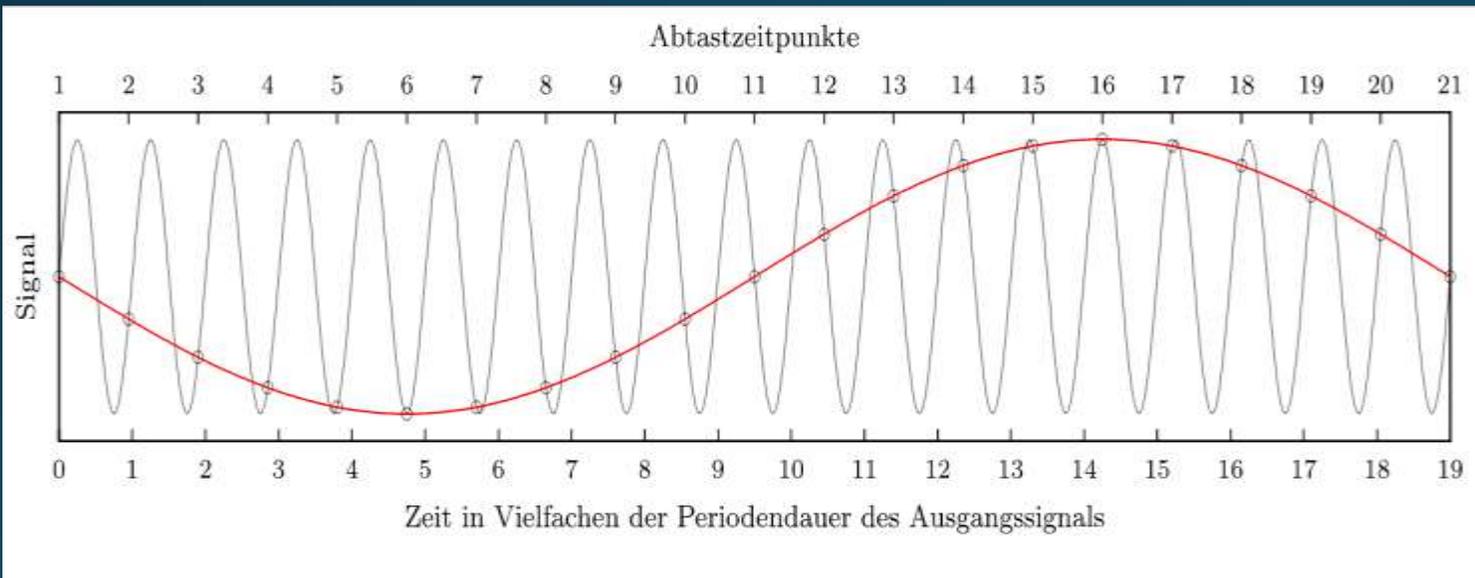
Synthese

<https://www.j-berkemeier.de/Fouriersynthese.html>
<https://phet.colorado.edu/de/simulation/fourier>



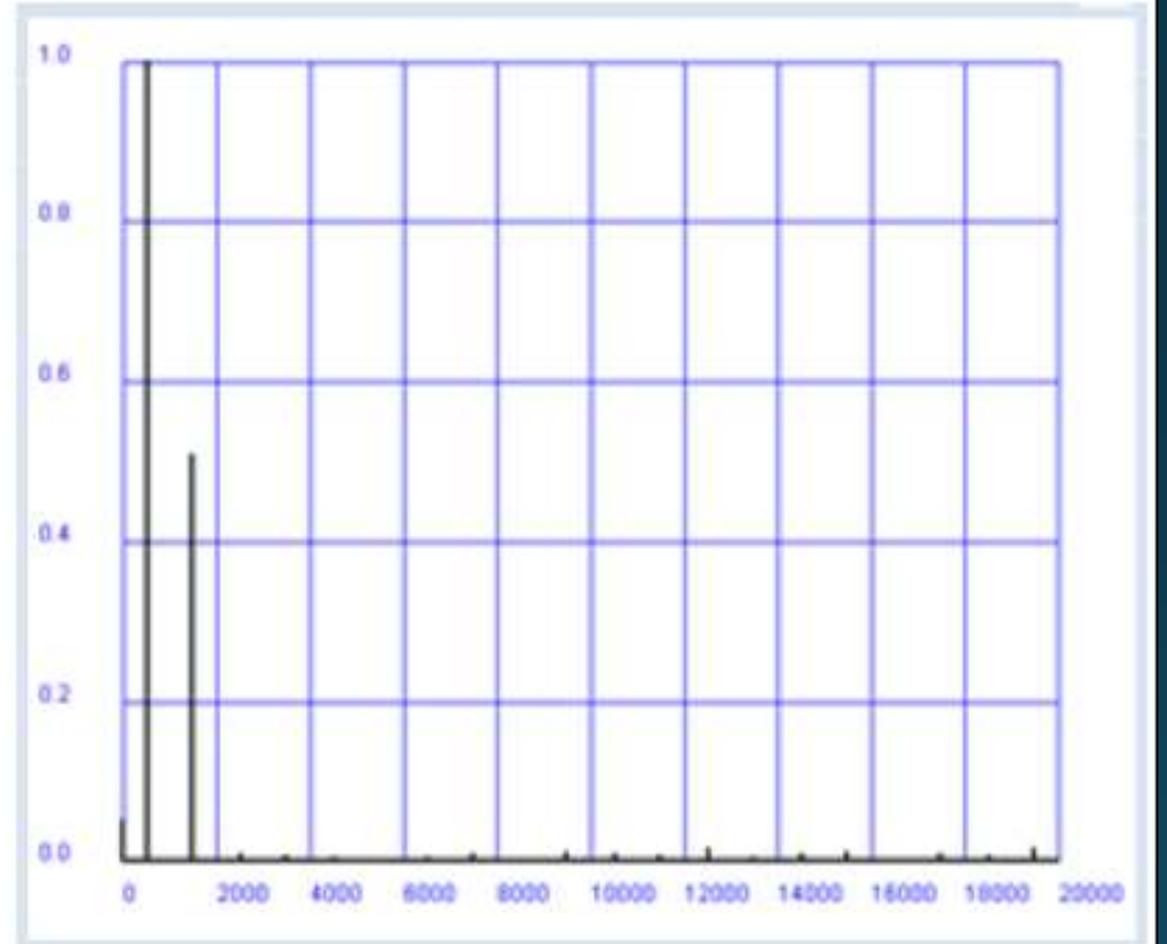
Abtastrate

Diese $n/2$ Rückgabewerte im Abstand r "bevölkern" das Frequenzgebiet von 0 bis $n/2 * r = fs/2$, oder kurz gesagt: **Bei einer Abtastrate von fs liefert die FFT das Spektrum von 0 bis $fs/2$.** Für eine Musik-CD mit der typischen Abtastrate $fs = 44100$ Hz entspricht dies einem Spektrum bis 22050 Hz, das den ganzen vom Menschen hörbaren Bereich umfasst.



Abtastrate / Spektrum

Um den Spektrumanalysator zu testen, verwendest du vorerst einen Klang "wav/doublesine.wav" aus der Distribution von TigerJython, der zwei Sinustöne überlagert. Der Klang wurde mit einer Abtastrate von $f_s = 40'000$ Hz aufgenommen. Nimmst du $n = 10'000$ Abtastwerte, so gibt dir die Funktion $fft(samples, n)$ 5'000 Frequenzanteile mit der Auflösung $r = 40'000 / 10'000 = 4$ Hz im Bereich 0..20'000 Hz zurück, die du in einem GPanel als Spektrum mit vertikalen Linien grafisch darstellst.



Übung 1 auf dem Zusatzblatt

- in 2er Gruppen:
- Löse die Aufgabe für die mit Leuchtstift markierten Signale
- lege Nr. 1 bis 6 auf die Folie

- Teilaufgaben a) b) und c) können parallel bearbeitet werden

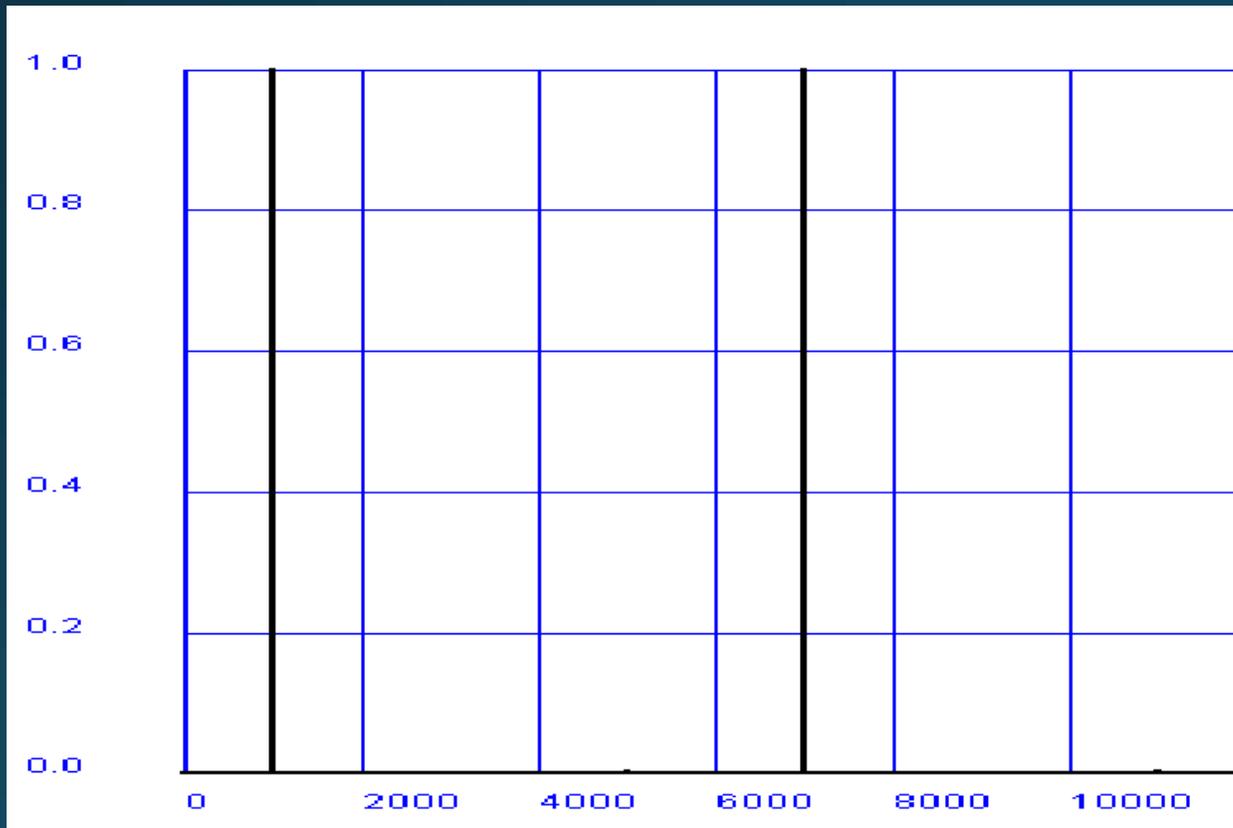
- **Zeit 15 Minuten**

Demo: Rechteckfunktion

«Mischung/Überlagerungsprinzip»

Bei Multiplikation entstehen neue Frequenzen!

$$\text{sine}(100, 4000, t) * \text{sine}(100, 3000, t)$$



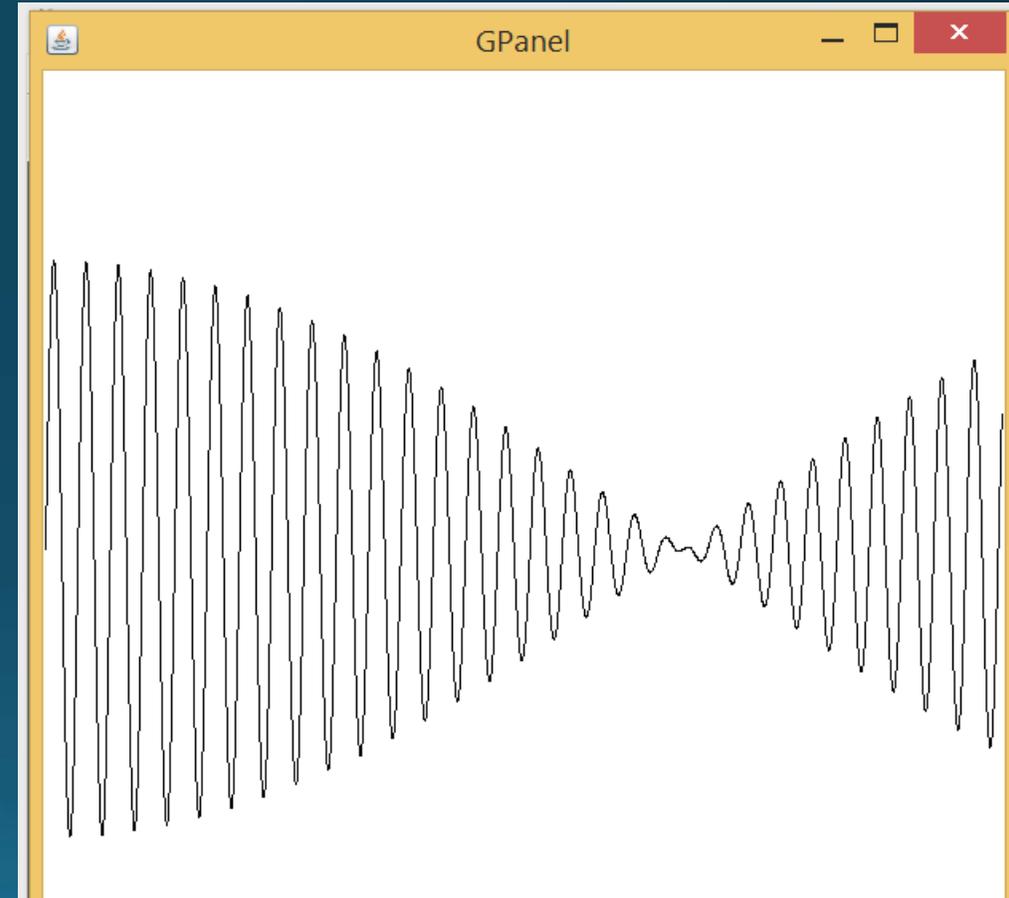
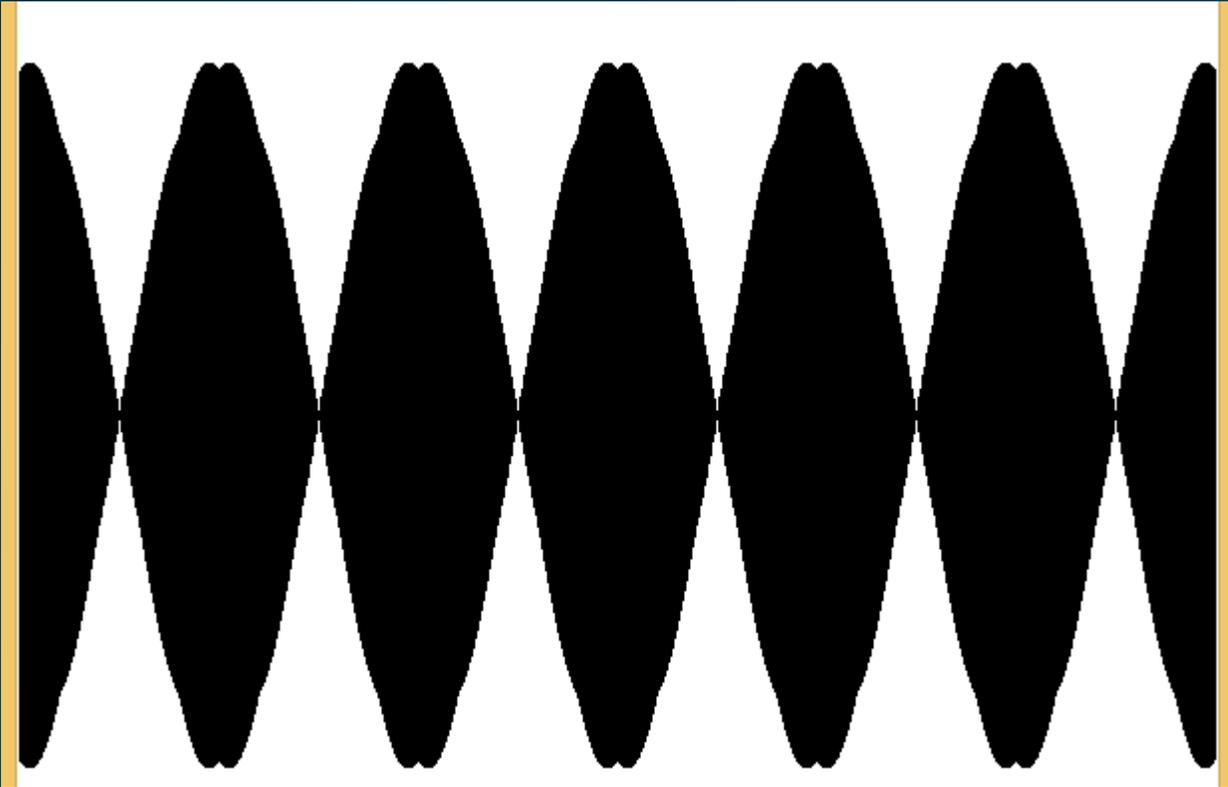
1000 Hz und 7000 Hz
= Summe und Differenz

Hohe Frequenzen können
in niedrige umgewandelt
werden

mathematische Erklärung?

«Schwebung»

$$\text{sine}(A, 4000, t) + \text{sine}(A, 3990, t)$$

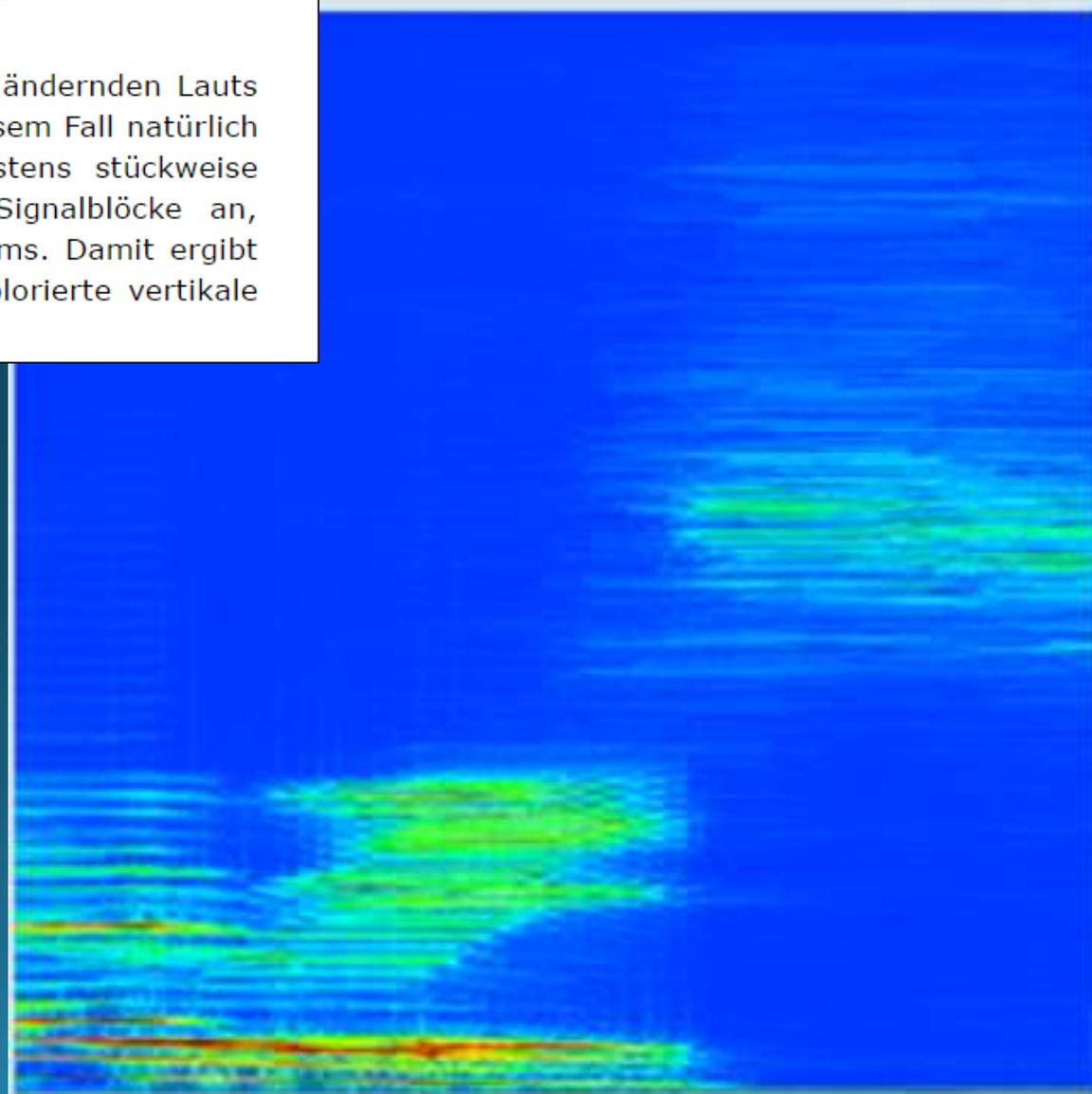
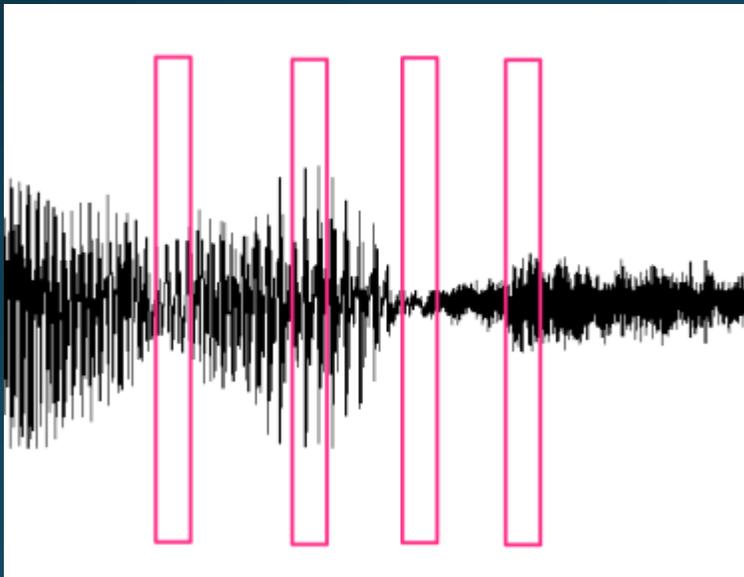


Sonogramme (harris.wav)

■ SONOGRAMME

Die FFT ist ein perfektes Tool, um den spektralen Verlauf eines sich zeitlich ändernden Lauts aufzuzeichnen, beispielsweise eines gesprochenen Worts. Das Signal ist in diesem Fall natürlich nicht mehr periodisch, man kann aber davon ausgehen, dass es wenigstens stückweise einigermaßen periodisch ist. Darum wendet man die FFT für kurze Signalblöcke an, beispielsweise für eine Blocklänge von 100 ms und wiederholt dies alle 2.5 ms. Damit ergibt sich alle 2.5 ms ein neues Spektrum, das man in einem Sonogramm als kolorierte vertikale Linie darstellen kann.

Akustischer Fingerabdruck



Übung 2 auf dem Zusatzblatt

- Sonogramm berechnen
- Raster auffüllen
- Zeit 10 Minuten

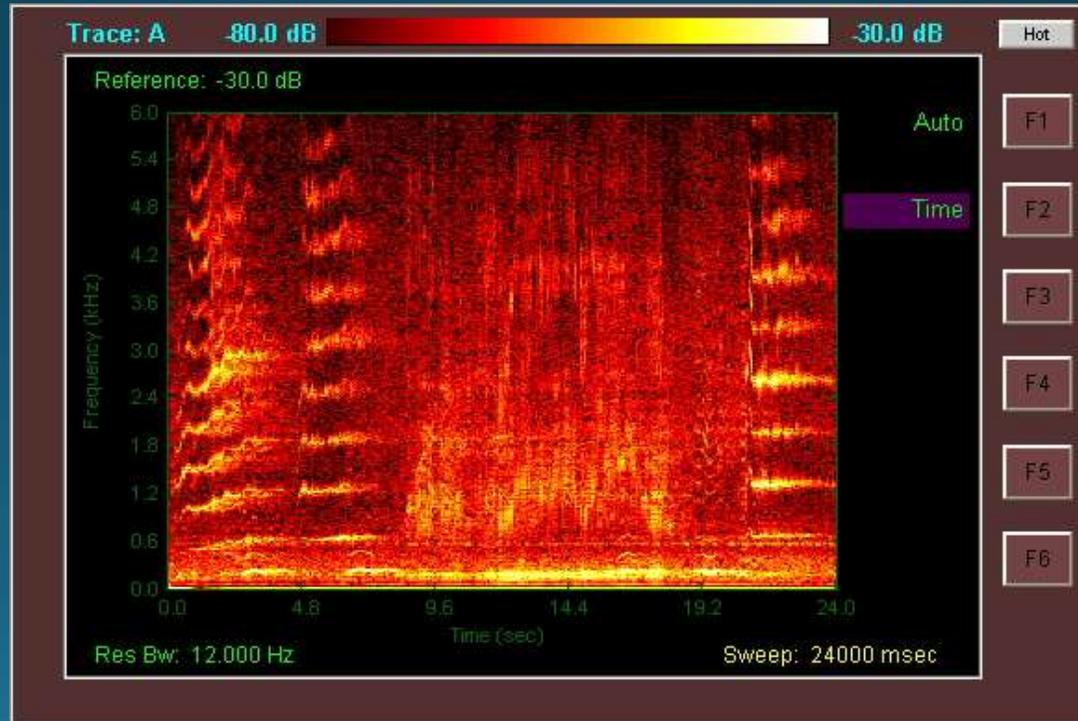
Anwendungen Spektralanalyse

- Liedererkennung : Shazam



- Stimmerkennung bei Mensch und Tier

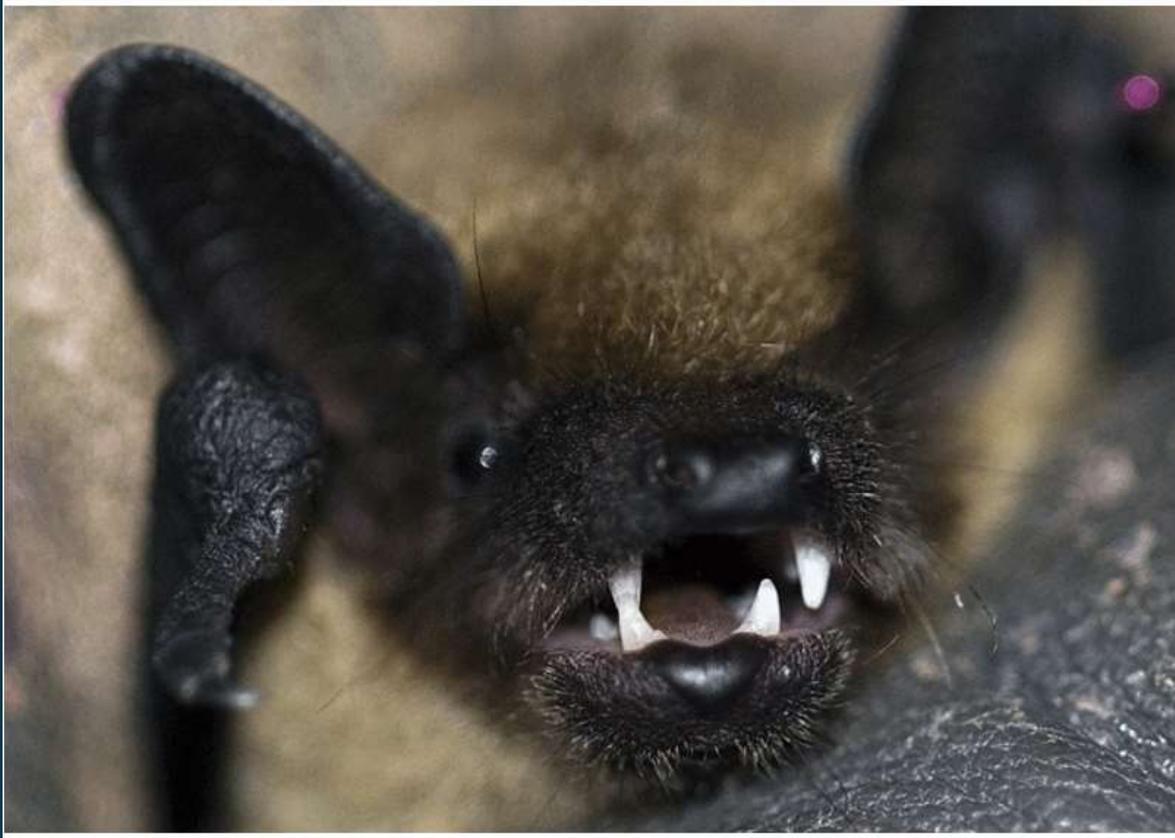
- Beispiel: Blauwale



Noch eine Aufnahme...



Sommer 2016 Bucht Spiez

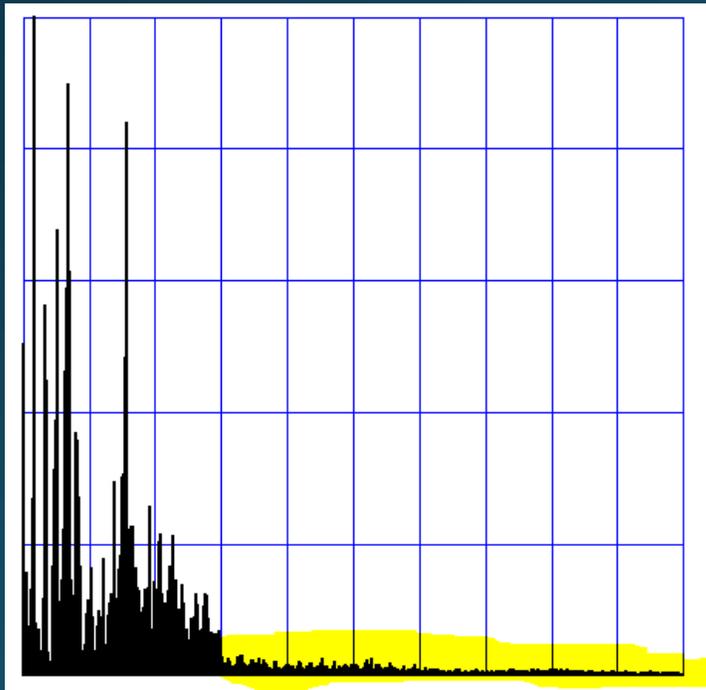


Der BATSCANNER STEREO ist ein einfach zu benutzender Fledermaus-Detektor. Er wandelt die Ultraschall-Fledermausrufe in den hörbaren Frequenzbereich nach dem Überlagerungsprinzip (Heterodyn). Was den

Reservefolien

Anwendungen

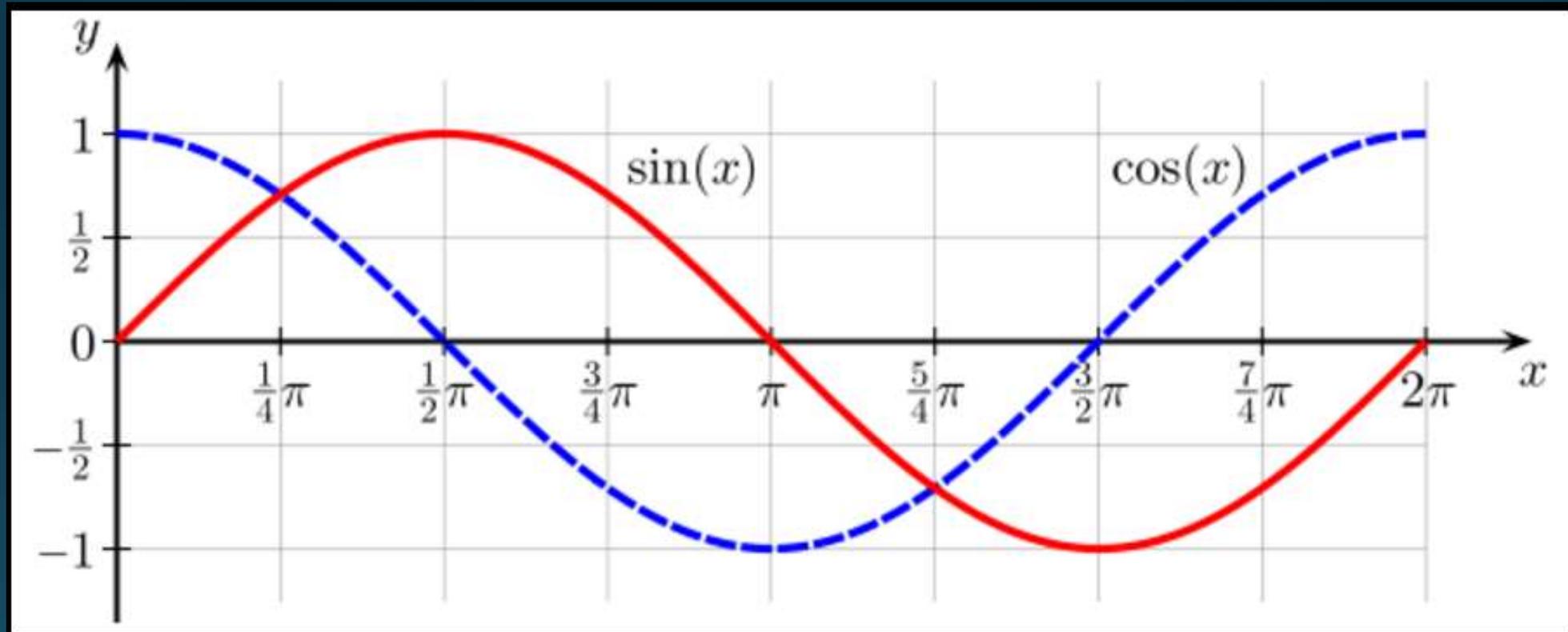
- JPG, MP3: Kompression
- Audio und Bildbearbeitung



Ein Bild mit von links nach rechts
abnehmenden Qualitätsstufen



Sinusfunktion, Cosinusfunktion



LoRa: Long Range Low Power Network

